நிகழ் தகவுக் கொள்கை ஓர் அறிமுகம்

(THEORY OF PROBABILITY)

மு. செயராம ஆறுமுகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 510

நிகழ்தகவுக் கொள்கை ஓர் அறிமுகம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

மு. செயராம ஆறுமுகம்,

கணிதப் பேராசிரியர்,

கோவிந்தசாமி அரசினர் கலைக்கல்லூரி,

திண்டிவனம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—October, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 510

THEORY OF PROBABILITY

M. JAYARAMA ARUMUGAM

Price Rs. 9-60

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
Muthukumaran Press,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன் ருண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழி லேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகை யில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரி யர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்ருன '**நிகழ்தகவுக் கொள்கை-ஓர் அறிமுகம்**' என்ற இந் நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **510** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **545** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. நிகழ்தகவு

1.1 நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் வரலாறு தோற்றமும் வளர்ச்சியும்

1.1-1 முன்னுரை: அறிவியல் துறையில் ஏற்பட்டுள்ள - ஏற்பட்டுக் கொண்டிருக்கும் ஒப்பற்ற முன்னேற்றத்திற்கும், வளர்ச்சிக்கும் அடிப்படைக் காரணம் என்ன என்பதைப்பற்றி ஆராய்ந்து பார்த்தால், அது மனிதன் தேவைதான் என்பது நன்கு விளங்கும். ஆனால் அறிவியலின் ஒரு சில பிரிவுகள் மனிதனின் எந்த ஒரு தேவையையும் பூர்த்தி செய்யும் நோக்கத்தின் விளைவாக அமையாது; அறிஞர்களின் அறிவாற்றல், அவர்கள் பல்வேறு வழிகளிலும் சிந்தனை செய்து செயலாற்றுந்திறன் ஆகியவற்றின் காரணமாக ஏற்பட்ட முன்னேற்றத்தைக் குறிப்பனவையாக உள்ளன. அறிவியலிலும் சரி, அல்லது அறிவியலுக்கே ஆதாரமாகவும், அதனுடன் நெருங்கிய தொடர்புடையதுமான கணித இயலிலும் சரி; பல்வகை தத்துவங்களும், கொள்கைகளும் தோன்றிய விதம் மிகவும் வியப்பூட்டத்தக்க முறையில் அமைந்துள்ளது. நாம் இங்கு காண இருக்கும் நிகழ்தகவுக் கொள்கையும் அத்தகைய கணித இயல் பிரிவுகளில் ஒன்றாகும்.

தற்காலத்தில்-அதாவது 20-ஆம் நூற்றாண்டில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள நவீன முறையில் நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் தோற்றம் அமையாதிருந்த போதிலும்; ஆரம்ப காலத்தில் இதற்கு அடிப்படைக் காரணமாக இருந்தவை "வாய்ப்பு விளையாட்டுகள்" எனும் பெயரிடப்பட்டு, மேற்கு நாடுகளில் பொழுது போக்குச் சாதனமாக இருந்து வந்த பல வகை சூதாட்டங்கள் தான் என்பதை அறிய நமக்கு மிகுந்த ஆச்சரியம் ஏற்படக்கூடும். அதாவது, கணித இயலின் ஒரு இன்றியமையாத பகுதியாகவும். மருத்துவம்,

விவசாயம், சமூக நலன், பொறியியல் போன்ற எல்லாத் துறைகளிலும் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் பயன்பட்டு வரக்கூடிய ஒன்றாகவும் இருக்கும் நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் தோற்றம் சூதாட்டத்தில் தான் என்பது ஒரு வியத்தகு உண்மையாகும்.

1·1-2 தோற்றம்: ஏறத்தாழ முன்னூறு ஆண்டுகளுக்கு முன், பிரெஞ்சு சமுதாயத்தில் சூதாட்டம் என்பது எல்லோராலும் ஒத்துக்கொள்ளப்பட்டதும் அரசாங்கத்தால் அங்கீகரிக்கப்பட்டதுமான, மிகவும் பிரசித்திப் பெற்ற பொழுது போக்கு விளையாட்டாக இருந்து வந்தது. பகடை விளையாட்டு, சீட்டாட்டம் முதலிய பல்வகை விளையாட்டுகளும் அக்கால நாகரீகத்தின் எடுத்துக் காட்டாக, பிரபுக்களாலும், பெருந்தனக்காரர்களாலும் கருதப் பட்டன. இவ்விளையாட்டுகளுக்காக ஏராளமான பொருள் செலவு செய்து, பொழுது போக்கு நிறுவனங்கள் நடத்தப்பட்டன. இந்த நிறுவனங்களில் நடைபெறும் சூதாட்டங்களில் பங்கு பெறுபவர்களின் வெற்றி வாய்ப்புகளை முறையாகக் கணக்கிடுவதற்கு ஏற்ற சாதனங்களை கண்டுபிடிப்பதற்கான முயற்சிகளும் எடுக்கப் பட்டன. டிமேர் (De Mere) எனும் சூதாட்டக்காரர், இவ் விளையாட்டுகளில் மிகவும் ஈடுபாடு கொண்டு அக்காலத்தில் புகழ் பெற்ற கணிதமேதையும் பெரும் வேதாந்தியுமான பிளாஸ் பாஸ்கல் (Blaise Pascal) என்பவரிடம், தனக்கு ஏற்படும் சந்தேகங்களையும் வினாக்களையும் கூறி, அவற்றிற்குத் தக்க விளக்கங்களை அளிக்குமாறு வேண்டி வருதல் வழக்கமாக இருந்தது.

இந்த சந்தேகங்களை தெளிவுறச் செய்வதற்கும், வினாக்களுக்கு விடைகாண்பதற்கும் பாஸ்கல் (Pascal) எடுத்துக்கொண்ட முயற்சிகளுள் ஒன்றுதான் பியர் ஃபெர்மாட் (Pierre Fermat) போன்ற பல கணித மேதைகளுடனும் அவர் கொண்ட தொடர்பாகும். இத் தொடர்பின் மூலம் வாய்ப்பு விளையாட்டுகளில் ஏற்பட்ட பல பிரச்னைகளுக்கும் கணித இயல் முறைப்படி தீர்வு காண விழைந்தார். பல அறிஞர்களுக்கிடையே இவ்வாறு ஏற்பட்ட தொடர்பு நவீன நிகழ்தகவுக் கொள்கைக்கு ஆரம்பமாக தோற்றுவாயாக அமைந்தது.

டிமேர் (De Mere) எழுப்பிய பல்வேறு பிரச்னைகளுக்கும் தீர்வு காணும் பொருட்டு 17-ம்நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில் வாழ்ந்த கணித வல்லுநர்கள் பலரும் சிந்தித்து முறையான முடிவுகள் காண முயன்றனர். ஆனால், அவர்களால் ஒன்று பட்ட கருத்துடைய முழுமையான பொதுக் கொள்கை எதையும்

உருவாக்க இயலாதுபோனாலும், பல வகை விளையாட்டுகளுடனும் தொடர்புடைய தனிதனி கணக்குகளுக்கு சரியான தீர்வுகள் காண்பதில் அவர்கள் வெற்றி பெற்றனர். அத்துடன் நிகழ்தகவுக்கு கணித இயல் முறைப்படி வரையறை கூறவும் அவர்களால் முடிந்தது. (இவ்வரையறை அடுத்த அத்தியாயத்தில் விளக்கமாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.) ஆனால் இந்த வரையறைப்படி நிகழ்தகவுக் காண்பதில், நடைமுறையில் சில குறைபாடுகள் எழுந்தன. அவற்றை நீக்கி, நிறைவான ஒரு முறையை உருவாக்குவதற்கான முயற்சிகள் தொடர்ந்து எடுத்துக்கொள்ளப் பட்டன.

1.1-3 வளர்ச்சி முதல்நிலை : 18-ஆம் நூற்றாண்டின் ஆரம்ப காலத்தில் நிகழ்தகவுக் கொள்கையில் சிறந்ததொரு விரைவான முன்னேற்றம் ஏற்பட ஜேம்ஸ் பெர்னௌலி (James Bernoulli) ஆப்ரகாம் டீ மாவர் (Abraham De Moivre) என்ற கணித மேதைகளின் உழைப்பும் ஆராய்ச்சியும் மிகவும் உதவியாக இருந்தன. இவர்களுள் பெர்னௌலி (Bernoulli) என்பவர் ஸ்விஸ் நாட்டிலிருந்த பெர்னௌவ்லி-கணித குடும்பத்தில் ஓர் அங்கத்தினராக இருந்தார். இப்பொருள் பற்றி, 20 ஆண்டுகள் ஆராய்ச்சி செய்து கண்ட முடிவுகளைத் தொகுத்து, இவர் எழுதிய "Art of Conjecture" எனும் நூலில் பல முக்கிய கருத்துக்களும், கொள்கைகளும் காணப்படுகின்றன. அவற்றுள் ஒன்றாகிய "பெர்னௌவ்லித் தேற்றம்" குறிப்பிடத்தக்கதாகும். குறிப்பிட்ட கணக்குகளின் தீர்வு காண்பதில் ஆரம்பத்தில் பயன்படுத்தப்பட்ட நிகழ்தகவுக் கொள்கையை விரிவு படுத்தி, ஒரு பொதுக் கொள்கையை, இத்தேற்றத்தின் மூலம் உருவாக்கினார். உலகில் நிகழும் தனித்தனி நிகழ்ச்சிகளின் விளைவுகள் ஒரு குறிப்பிடத்தக்க ஒழுங்கு முறையின் அடிப்படையில் அமையாதிருப்பினும்; அந்நிகழ்ச்சிகளை மிகப்பல தடவைகள் செய்து பார்க்கும்போது கிடைக்கும் விளைவுகள் அனைத்தும் வியக்கத்தக்க ஒரு ஒழுங்கு முறைப்படி அமைந்திருக்கும் என்பதை பெர்னௌவ்லி தேற்றம் எடுத்துக் காட்டுகிறது. இந்நூல், பெர்னௌலி இறந்த சில ஆண்டுகளுக்குப்பிறகு, 1713-ஆம் ஆண்டில் அவருடைய உறவினர் ஒருவரால் வெளியிடப்பட்டது.

இதேபோன்று பிரெஞ்சு நாட்டைச் சேர்ந்த டீ மாவர் (De Moivre) எனும் அறிஞர் இங்கிலாந்து நாட்டில் வசித்து வந்த கட்டுரையில் வாய்ப்பு விளையாட்டுகள் பற்றிய கணிதவியல்

போது. The Doctrine of chances—A method of calculating Probabilities of events in Play'' என்ற சிறந்ததொரு நூலை எழுதினர். இந்நூல் முதன் முதலில் 1718-ஆம் ஆண்டு வெளியிடப்பட்டது. இதன் முக்கியத்துவத்தை உணர்ந்த மக்களின் ஆர்வத்தின் காரணமாக இந்நூல் மீண்டும் 1738, 1756-ஆம் ஆண்டுகளில் இரண்டு பதிப்புகளாக வெளியிடப்பட்டது. மிகவும் பயன்படத்தக்க பல கருத்துக்களும் கொள்கைகளும் அடங்கிய இந்நூலில் தான் முதன் முதலாக நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் பெருக்கல் விதி எடுத்துக் கூறப்பட்டுள்ளது. மேலும் இரண்டாவது மூன்றுவது பதிப்புகளில், நிகழ்தகவுப் பரவல்களில் சிறப்பானதும் மிகவும் பயன்படத்தக்கதுமான ''இயல் நிலைப் பரவல்' பற்றிய முதல் குறிப்புகள் காணப்பட்டன.

இவ்வாறு, இந்த இரண்டு மாமேதைகளின் அறிவாற்றலினுல் வாய்ப்பு விளையாட்டுக்கொள்கையில் படிப்படியான முன்னேற்றம் ஏற்படவும், விரிவான கணித இயல் முறையினைக்கொண்டு நிகழ்தகவின் விளக்கம் காணவும் முடிந்தது. அதுமட்டுமின்றி இத்துறையில் ஏற்பட்ட முன்னேற்றத்திற்கும், பொதுவாக கணித இயலில் அடைந்து வந்த முன்னேற்றத்திற்கும், அக்காலத்தில் நெருங்கிய தொடர்பு ஏற்படவும் ஏதுவாக இருந்தது. அதன் விளைவாக நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் ஆரம்ப நிலையில் குறிப்பிடத்தக்க முன்னேற்றம் ஏற்பட வாய்ப்பாக இருந்தது. பின்னர், இடைக் காலத்தில் அத்தகைய நெருங்கிய தொடர்பில்லாது போய்விட்டது. மீண்டும் அத்தொடர்பு சமீபகாலத்தில் தான் மேலும் வலுவானதாக உருவாக்கப்பட்டது.

18-ஆம் நூற்றுண்டின் பிற்பகுதியில் வாழ்ந்து வந்த டி. பெயிஸ் (T. Bayes) என்பவரும் லெக்ராஞ்சி (Lagrange) என்பவரும் நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் முன்னேற்றத்திற்கு சிறப்பான சேவை புரிந்தனர். இச்சமயத்தில் தான் நிகழ்தகவுக் கொள்கையை விரிவு படுத்தி, வாய்ப்பு விளையாட்டுகளுக்கு மட்டுமின்றி, அவற்றிலிருந்து முற்றிலும் மாறுபட்ட பல் வகை நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பயன்படுத்த முற்பட்டனர். இவற்றையெல்லாம் தொகுத்தளித்த பெருமை, புகழ்பெற்ற அறிஞராகிய Laplace-ஐச்சாரும் இவர் அறிவியலில் ஈடுபட ஆரம்பித்த நாளிலிருந்து இப்பொருள் பற்றி தொடர்ந்து ஆராய்ச்சி செய்து வந்ததின் விளைவாக பல கட்டுரைகள் எழுதினர். இவற்றுள் மிகச்சிறந்த ஆய்வுக் கட்டுரையான, '' Theoric Analytique Des Probabilities '' என்பது நூல் வடிவத்தில் 1812-ம் ஆண்டில் வெளியிடப்பட்டது. இந்த

கொள்கையை முறையாகவும், முழுமையாகவும் விளக்கியுள்ளார். மேலும், நடை முறையில் ஏற்பட்ட சிக்கல்களுக்கும், அறிவியியல் துறையில் எழுப்பப்பட்ட பல வினுக்களுக்கும், நிகழ்தகவுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் எவ்வாறு தீர்வு காண லாம் என்பதை பல்வேறு எடுத்துக் காட்டுகளின் வாயிலாக இந் நூலில் குறிப்பிட்டுள்ளார். ஆனுல் நிகழ்தகவு கொள்கை பற்றிய அடிப்படை வரையறைகளில் எவ்வித மாற்றமும் செய்யாது, அவற்றை அப்படியே கையாண்டுள்ளார். எனினும், லாப்லாசின் சீரிய தொண்டு, பிற்காலத்தில் ஏற்பட்ட பல முன்னேற்றங் களுக்கும் ஆதாரமாகவும், சிறந்ததோர் எடுத்துக் காட்டாகவும் அமைந்திருந்தது என்பதை அனைவரும் அறிவார்கள்.

1.1-4 வளர்ச்சி—இரண்டாம் நிலை : பத்தொன்பதாம் நூற்ருண் டில் நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் பயன் விரைவாகவும், தொடர்ந்தும் பற்பல துறைகளுக்கும் விரிவாக்கப்பட்டபோதி லும் இக்கொள்கையின் கணிதவியல் பிரிவில் எவ்வித முன்னேற்றமும் இன்றி தேக்க நிலை ஏற்படலாயிற்று. கணிதத் துறைக்கும் நிகழ்தகவுக் கொள்கைக்குமிடையே முன்னர் இருந்த நெருக்கம் குறைய ஆரம்பித்தது. எனவே இருபதாம் நூற்ருண்டின் ஆரம்பத்தில், ஏனைய கணித வியல் பிரிவு களைப் போன்று, நிகழ்தகவுக் கொள்கையையும் பகுத்தறிவு முறையை ஒட்டிய துல்லிய கணிப்பாகவும், விதிமுறை அழுத்தப்பாடுடையதாகவும் வரையறுக்கப்பட வேண்டியதன் அவசியத்தை பலரும் உணர ஆரம்பித்தனர். இவ்வாறு செய்வதன் மூலம் நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் அடிப்படை மிகவும் வலுவுடைய தாகவும், விரிவான பயனளிக்கக் கூடியதாகவும் மாற்றியமைக்க முடியும் என்பதை அறிஞர்கள் பலரும் தெளிவாக்கினர்.

இந்த நோக்கத்தினை கருத்தில் கொண்டு, சிறந்ததொரு முன்னேற்றத்திற்கு வழி வகுத்தவர்களுள் பெர்ட்ரண்ட் (Bertrand), பாயின்கர் (Poincare) போன்ற அறிஞர்களின் சேவை போற்றுதற் குரியதாகும். மேலும் செபிசெவ் (Tchebycheff), மார்கோவ் (A. Markoff), லியாபானவ் (A. Liapounoff) போன்ற ரஷிய மேதைகளின் பங்கும், நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் வளர்ச்சிக்கு மிகவும் உதவியாக இருந்தது. நிகழ்தகவுக் கொள்கையை கணித வியல் முறைப்படி வரையறுப்பதற்குப் பதிலாக, புதியதொரு வரை விலக்கணத்தை, வலுவான அடிப்படையில், விளக்க முயற்சிகள் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டன. இத்தகைய முயற்சிகளின் பலனுக, அலைவெண்களின் விகிதங்கள் ஒரு நிலைத்த தன்மையினை உடையவையாக இருந்தமையால் இவ்விகிதங்களின் எல்லை

மதிப்பாக நிகழ்தகவு வரையறுக்கப்பட்டது. ஆனால் இந்த வரையறையின் அடிப்படையில் நிகழ்தகவுக் கொள்கையை விரிவாக்குவதனால், ஆரம்ப நிலையில் கொடுக்கப்பட்ட வரைவிலக்கணத்தின் முக்கியத்துவம் குறையக்கூடும் என அஞ்சி, இவ்வரையறையை நிகழ்தகவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுவதற்கான ஒரு சாதனமாக—விதியாக மட்டும் பயன்படுத்தப்பட்டது. நிகழ்தகவுக் கொள்கையை விளக்க இத்தகைய முறையை அறிமுகப்படுத்திய பெருமை வான் மிஸ்ஸஸ் (Von Mises) என்ற கணிதவல்லுநரைச் சாரும். இத்துறையில் பாய்சான் (Poisson) போன்ற பேரறிஞர்களின் ஆராய்ச்சிகளும், புதிய கண்டுபிடிப்புகளும் சிறப்பான அம்சங்களாகும்.

1·1-5 வளர்ச்சி—மூன்றும் நிலை: பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டின் பிற்பகுதியிலிருந்தே, அலைவெண் மாதிரியில், எல்லா சூழ்நிலைகளுக்கும் பொறுத்தமான, அடிப்படையில் மாறுபட்ட பலநிகழ்ச்சிகளுக்கும் பயன்படக் கூடிய ஒரு பொது வரையறையை அறிமுகப்படுத்த எடுத்துக் கொண்ட பல முயற்சிகளின் விளைவாக இருபதாம் நூற்றுண்டின் ஆரம்பத்தில் நிகழ்தகவுக் கொள்கைக்கு நவீன முறையில் ஒரு இலக்கணம் வரையறுக்கப்பட்டது. கணிவியலில், வாதத்திற்கு அடிப்படையாக சில கருத்துக்களை உண்மையென ஒப்புக்கொண்டு, அக்கருத்துக்களைப் பயன்படுத்தி குறிப்பிட்ட கொள்கையை விரிவுபடுத்தி விளக்கம் காணுதல் வழக்கமாக உள்ளது. இதே முறையில், எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவையும், அந்நிகழ்ச்சியோடு தொடர்பு படுத்தப்பட்ட ஒரு எண்ணைக் கருதுவது என்பது நிகழ்தகவுக் கொள்கை விளக்கத்தில் ஒரு புதிய மாற்றமாகும். இந்த எண், சில அடிப்படைத் தன்மைகளையுடையதாக—வெளிப்படையான சில உண்மைகளுக்குட்பட்டதாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது.

இவ்வாறு, நிகழ்தகவு என்பது பின்வரும் வெளிப்படை உண்மைகளுக்குட்பட்டதோர் எண் என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு ஒரு குறிப்பிட்ட முயற்சியின் விளைவாக கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சியை E எனக் குறிப்பிடுவோம்.

1. E எனும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக்கும் ஒப்ப, ஒரு மாறுதலில்லா குறைவிலா மெய்யெண் அந்நிகழ்ச்சியோடு தொடர்புபடுத்தப்படும். இந்த எண்ணை அந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்று கூறுவர்.

2 எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவும் ஒன்றைவிட அதிக மாக இருக்க முடியாது.

அதாவது $P(E)$ என்பது E எனும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எனில்.

$0 \leq P(E) \leq 1$ என்றிருக்க வேண்டும்.

3. ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுதல், அல்லது வெற்றியடைதல் உறுதி என்றால், அதன் நிகழ்தகவு ஒன்று என்றும்; மாறாக அந் நிகழ்ச்சி தோல்வியுறுமானால், அதன் நிகழ்தகவு பூச்சியம் என்றும் கொள்ளப்படும்.

இப்புதிய முறையை பின்பற்றுவதன் மூலம், நிகழ்தகவுக் கொள்கைக்கும். கணிதவியலுக்குமிடையே இருந்த பழைய நெருக்கமான தொடர்பு மீண்டும் வலியுறுத்தப்படுகிறது. சுருங்கக் கூறின், நவீன நிகழ்தகவுக் கொள்கை என்பது தூய கணித இயலின் ஒரு பகுதியாகவே கருதப்படுகிறது. மேலும் தற்காலத்தில் இக்கொள்கை பயன்படுத்தப்படாத துறையே இல்லை எனக் கூறலாம். இந்த முறையைப் பின்பற்றி நிகழ்தகவுக் கொள்கையை பல நிலையிலும் வளரச் செய்தவர்களுள், கிஞ்சின் (Khintchine), கால்மோகிராவ் (Kolmogoroff) போன்ற ரஷிய அறிவாளிகள் முக்கியமாகக் குறிப்பிடத்தக்கவர்களாவர். இதே போன்று, லெவி (Levy), பிஷர் (Fisher) முதலிய மேலை நாட்டு அறிஞர்கள், கணிதத் துறைக்கு ஆற்றியுள்ள சேவை போற்றுதற் குரியதாகும்.

1·1·6 முடிவுரை : இவ்வாறு கணித இயலை அடிப்படையாகக் கொண்டு. நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் வளர்ச்சி மூன்றுவித நிலை களில் ஏற்பட்டுள்ளது என்று அறிகிறோம். மூன்றாவது நிலையில், நவீன முறைப்படி கொடுக்கப்பட்ட வரையறைகளும், விளக்கங்களும், அடிப்படையில் வேறுபட்ட பல துறைகளிலும் பெரிய அளவில் பயன்பட்டுவருகின்றன; அத்துறைகளில் ஏற்பட்டுள்ள சிறப்பான முன்னேற்றத்திற்கும், நிகழ்தகவுக் கொள்கை ஒரு முக்கிய சாதனமாக அமைந்துள்ளது.

1·2 சொற்றொடர்களின் வரைவிலக்கணங்கள்

(அ) முயற்சியும், நிகழ்ச்சியும்: ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட முடிவு களைத் தரவல்ல ஒரு பரிசோதனையை, அல்லது கண்டறிதலை

(Experiment of observation) ஒரு முயற்சி என்றும்; அதன் விளை வாகக் கிடைக்கப்பெறும் முடிவுகள் ஒவ்வொன்றினையும் ஒரு நிகழ்ச்சி என்றும் கூறுகிறோம். இவற்றை முறையே T (Trial), E (Event) என்ற எழுத்துக்களால் குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் : (i) ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும் செயலை ஒரு முயற்சி என்றும், அதன் முடிவில் பூ அல்லது தலை கிடைக்கப் பெறுவதை ஒரு நிகழ்ச்சி என்றும் கூறுவோம். அதாவது T என்பது நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும் செயலையும், E என்பது பூ, தலை கிடைப்பதையும் இங்கு குறிக்கும்.

(ii) இதேபோன்று, அறுமுகப் பகடை ஒன்றை உருட்டிவிட்டால்; 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்களுள் ஒன்று மேல்பக்கத்தில் (முகத்தில்) கிடைக்கப்பெறும். இங்கு பகடையை உருட்டும் செயலை T என்றும், ஆறு எண்களுள் ஒன்று மேல்பக்கத்தில் கிடைக்கப் பெறுவதை E என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

(iii) மேலும், இரண்டு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டும்போது (1, 2), (1, 3), ...(1, 6); (2, 1), (2, 3), ...(2, 6)...... அல்லது (1, 1), (2, 2), ... (6 6) என்ற ஜோடி எண்கள் கிடைக்கலாம். எனவே T என்பது இரண்டு பகடைகளையும் உருட்டும் செயலையும், E என்பது ஜோடி எண்களின் கணங்களுள் ஒன்றையும் குறிக்கும்.

(iv) இவ்வாறின்றி, புள்ளிவிவரங்களை சேகரிக்கும்போது, ஒரு கிராமத்திலுள்ள மக்களுள் படித்தவர்கள், படிக்காதவர்கள், விவசாயம் செய்பவர்கள், வேறு தொழிலில் ஈடுபட்டுள்ளவர்கள் போன்றவற்றை கணக்கிடுதலை T எனவும்; குறிப்பாக படித்தவர்கள் இத்தனை பேர், அல்லது விவசாயம் செய்பவர்கள் இத்தனை பேர் என்று எண்ணால் குறிப்பிடுவதை E எனவும் கொள்ளலாம்.

(ஆ) சரிசம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Equally Likely or Probable Events) : ஒரு முயற்சியினால் கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பு சமமாகவே இருப்பின், அந்நிகழ்ச்சிகளை சரிசம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம்.

உதாரணமாக, நாணயத்தைச் சுண்டுவதால், பூ அல்லது தலை கிடைக்கும் என்று தெரியும். எனவே இந்நிகழ்ச்சிகள் நிகழ

சம வாய்ப்புகள் உள்ளன என்று விளங்குகிறது. அதாவது பூ கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பும், தலை கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பும் சமமாகவே உள்ளன என்று தெரிகிறது.

(இ) ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (MutuallyExclusive Events) : இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்றின் நிகழ்வு, அதே நேரத்தில் மற்ற நிகழ்ச்சியை நிகழாமல் தடுக்குமாயின், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளையும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம்.

உதாரணமாக, ஒரு பகடையை உருட்டும்போது, 1, 2, 3, 4, 5, 6 எண்களுள் ஏதேனும் ஒன்றுதான் மேல்பக்கத்தில் கிடைக்கப் பெறும். எனவே 6 என்ற எண் மேல்பக்கத்தில் கிடைத்தால், வேறு எந்த எண்ணும் மேல்பக்கத்தில் வரமுடியாது. அதாவது ஆறு எண்களும் தனித்தனியே கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையன என்று தெரிகிறது.

அடுத்ததாக ஒன்றுக்கும் நூறுக்கும் இடையே உள்ள எண்களும் 11-ஆல் வகுபடும் எண் ஒன்றைக் காணும் நிகழ்ச்சியும், 13-ஆல் வகுபடும் எண் ஒன்றைக் காணும் நிகழ்ச்சியும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையன. ஏனெனில் காணும் எண் 11-ஆல் வகுபடுமாயின் அது 13-ஆல் வகுபடமுடியாது.

(ஈ) சார்புடை நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளும் (Dependent and Independent Events) : இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுள், ஒன்றின் நிகழ்வு அல்லது நிகழாமை, மற்ற நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதை எவ்விதத்திலேனும் பாதிக்குமாயின், அந்நிகழ்ச்சிகளை சார்புடை நிகழ்ச்சிகள் என்றும்; அவ்வாறின்றி ஒன்றின் நிகழ்வு வேறு நிகழ்ச்சிகளை பாதிக்காமலிருப்பின், அவற்றை சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் என்றும் கூறுகிறோம்.

உதாரணமாக, ஒரு பையில் 7 பச்சை நிறப்பந்துகளும், 8 சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்பையிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக முதலில் எடுத்த பந்தைத் திரும்பப் பையில் போடாமல் இரண்டு பச்சை நிறப்பந்துகளை எடுத்தால், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் (முதலில் ஒரு பச்சைப்பந்தும், அதன் பின் மற்றொரு பச்சைப்பந்தும் எடுக்கும் நிகழ்ச்சிகள்) சார்புடையனவாகும்.

ஆனால், ஒன்றன்பின் ஒன்றாகவோ, அல்லது ஒரே சமயத்திலே இரண்டு பகடைகளை உருட்டினால், முதல் பகடையிலிருந்து 6 என்ற எண்ணும், இரண்டாவது பகடையிலிருந்து 3 என்ற எண்ணும் கிடைக்குமாயின், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலாதனவாகும். ஏனெனில், ஒருபகடையிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் எண்ணைப் பொறுத்து மற்றொன்றிலிருந்து கிடைக்கும் எண் அமையாது என்று நன்கு விளங்கும்.

(உ) **தனி நிகழ்ச்சியும், கூட்டு நிகழ்ச்சியும்** (Simple and Compound Events): ஒரு முயற்சியினால் ஒரே ஒரு முடிவு கிடைக்கப்பெறின் அதைத் தனி நிகழ்ச்சி என்றும்; மாறாக ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட முடிவுகள் கிடைக்குமாயின் அத்தகைய நிகழ்ச்சியை கூட்டு நிகழ்ச்சி என்றும் கூறுதல் வழக்கம்.

சமச்சீரான நாணயம் ஒன்றை சுண்டினால் பூ அல்லது தலை கிடைக்கும். இவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு தனி நிகழ்ச்சியாகும். இதே போன்று ஒரு வகுப்பிலுள்ள 60 மாணவர்களுள் பாடத் தெரிந்தவர்கள் 10 பேர் அல்லது 15 பேர் என்றறியும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு தனி நிகழ்ச்சி எனப்படும். ஆனால் பாடத் தெரிந்தவர்கள் குறைந்தது 30 பேர் இருப்பார்கள் என்று கண்டறியும் நிகழ்ச்சியை ஒரு கூட்டு நிகழ்ச்சி என்கிறோம்.

மேலும் ஒரு பையில் வைக்கப்பட்டுள்ள 7 வெள்ளைப் பந்துகள், 5 மஞ்சள் பந்துகளிலிருந்து ; முதலில் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும், அதன்பின் 3 மஞ்சள் பந்துகளும் எடுக்கும் நிகச்சியானது ஒரு கூட்டு நிகச்சியாகும். ஆனால் 2 வெள்ளைப் பந்துகள் மட்டும் அல்லது 3 மஞ்சள் பந்துகள் மட்டும் எடுக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு தனி நிகழ்ச்சியாகும்.

(ஊ) **விரிவான நிகழ்ச்சியும், சர்வசம நிகழ்ச்சிகளும்** (Exhaustive and Equivalent Event): ஒரு முயற்சியினால் கிடைக்கப்பெறும் எல்லாவித பல்வேறு முடிவுகளையும் உள்ளடக்கிய நிகழ்ச்சியை விரிவானது என்று கூறுகிறோம். இரண்டு வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்றின் நிகழ்வு அல்லது நிகழாமை, மற்றொன்றின் நிகழ்வு அல்லது நிகழாமை, உள்ளடக்கியிருப்பின், அந்த நிகழ்ச்சிகள் இரண்டும் சர்வ சமமானவை என்கிறோம்.

உதாரணமாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும் நிகழ்ச்சியின் போது பூ அல்லது தலைதான் கிடைக்குமே தவிர வேறொன்றும் நிகழாது என்று திட்ட வட்டமாகக் கூறமுடியும். எனவே இந் நிகச்சிகளை விரிவானவை என்று கூறலாம். இதே போன்று ஒரு பகடையை உருட்டி விடும்போது 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண் களுள் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்கப் பெறும். ஒவ்வொரு எண்ணும் கிடைப்பதை ஒரு நிகச்சி என்போமானால், இந்த ஆறு நிகழ்ச்சிகளும் விரிவானவை யாகும்

அடுத்து, இரண்டு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டி விளையாடும் போது கிடைக்கும் எண்கள் இரண்டின் கூட்டுத் தொகை இரட்டை எண்களாக இருக்க வேண்டுமானால், இரண்டு பகடைகளிலிருந்தும் கிடைக்கும் எண்கள் இரண்டுமே இரட்டை யாகவோ அல்லது இரண்டுமே ஒற்றையாகவோத்தான் இருக்க வேண்டும், வேறுபட்ட இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சர்வ சம மானவை என்று கூறுகிறோம்.

1·3 நிகழ்தகவு

நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவுகளை இரண்டு பெரும் வகைகளாகப் பிரித்துள்ளனர். அவை (அ) கணித இயல், அல்லது முன் நிகழ்தகவு (Mathematical or Apriori Probability) என்றும் ; (ஆ) புள்ளியியல், அல்லது பின் நிகழ்தகவு (Statistical or Aposteriori Probability) என்றும் கூறப்படும். இரண்டாவது வகையை நடைமுறை (Empirical) நிகழ்தகவு என்றும் கூறுவர். இங்கு முதலில் கணித இயல் முறைப்படி நிகழ்தகவின் வரையறையைக் கவனிப்போம்.

1·3-1 நிகழ்தகவின் கணித இயல் வரைவிலக்கணம் : ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களுள், ஒரு குறிப்பிட்ட மாண வர், ஆண்டுத் தேர்வில் நிச்சயம் வெற்றியடைவர் வெற்றியடைய மிகுந்த வாய்ப்புள்ளது, வெற்றியடையலாம் அல்லது வெற் றியடைய மாட்டார் என்ற பலவேறு வாக்கியங்களின் மூலம், அம்மாணவரின் படிப்புத்திறமையின் தன்மையைப் பற்றிய கருத் துக்களை வெளியிட முடியும். இவ்வாறு கூறும்போது அம் மாண வரின் அறிவு, தனித்திறமை, அவர் வகுப்பில் கவனம் உடைய வராயிருத்தல் அல்லது கவனம் இல்லாதவராயிருத்தல் போன்ற சாதகமான அல்லது பாதகமான பண்புகள் அல்லது சூழ்நிலைகளை மனதில் கொண்டுள்ளோம். இவ்வாறு ஒரு நிகழ்ச்சி (அதாவது, இங்கு தேர்வில் வெற்றியடைதல்) நடந்தேறுதல் அல்லது நட வாமையைக்குறிக்க, "நிச்சயம் நடக்கும்", " நடந்தேற வாய்ப்பு

உண்டு,'' '' நடக்கலாம் '' அல்லது '' நடக்காது '' போன்ற வார்த்தைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். அவ்வாறின்றி கணித வியல் மூலம் ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான வாய்ப்பைக் கூறிவதற் காகப் பயன்படும் ஒரு கணியம் (அல்லது அளவு) தான் அந் நிகழ்ச்சியின் **நிகழ்தகவு** எனப்படும்.

மேலே கூறிய நிகழ்ச்சியில், அம் மாணவர் '' நிச்சயம் வெற்றியடைவார் என்பதைக் குறிப்பிட, வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு '' ஒன்று '' என்றும் ; வெற்றியடைய மாட்டார் என்பதைக் குறிப்பிட, வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு '' பூச்சியும் '' என்றும் கூறுவது வழக்கம். அம் மாணவரின் ஏனைய நிலையை உணர்த்த பூக்சியத்திற்கும், ஒன்றுக்கும் இடையே உள்ள ஏதேனும் ஒரு பின்ன மதிப்பைப் பயன்படுத்துகிறோம். உதாரணமாக, அம் மாணவர் வெற்றியடைவதற்கும், தோல்வி யடைவதற்கும் சம வாய்ப்பு இருப்பின், அவர் வெற்றியடைவதற் கான நிகழ்தகவு '' $\frac{1}{2}$ '' என்கிறோம். இவ்வாறு நிகழ்தகவுகளை கணிதவியல் முறைப்படி அளக்கும் அலகாக '' நிச்சயத்தன்மை அல்லது '' உறுதி '' (Certainty) பயன்படுகிறது. இதை பின் வருமாறு விளக்குவோம்.

1·3-2 நிகழ்தகவு காணும் முறை : E எனும் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி m வெவ்வேறுவழிகளில் நடைபெறும் என்றும், n வெவ்வேறுவழிகளில் நடைபெருது என்றும் கொள்வோம். மேலும் இவ்வழிகள் அனைத்தும் சமவாய்ப்புடையன என்றும் எடுந்துக்கொள்வோம். எனவே இந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற் கான வாய்ப்பிற்கும், நடைபெருமல் இருப்பதற்கான வாய்ப் பிற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $m : n$ என்றுதெரிகிறது மேலும் e என்பது ஏதேனும் அளவிடப்படா ஒரு மாறிலி எனில், me என்பது இந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்பையும் ; ne என்பது நடைபெருததற்கான வாய்ப்பையும் குறிக்கும். ஆகையால் இவற்றின் கூட்டுத்தொகை $me + ne = (m + n)\,e$ என்பதாம்.

மேலும் ''உறுதி''யை நிகழ்தகவை அளக்கும் ஒரு அலகாகக் கொள்வோமாயின் இக்கூட்டுத்தொகையின் மதிப்பு ''ஒன்று'' என இருத்தல்வேண்டும் அதாவது, $(m + n)\,e = 1$ என்ருகும்.

ஆகையால், $e = \dfrac{1}{m + n}$ என்று பெறப்படும்.

எனவே, E எனும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$= \dfrac{m}{m + n}$, E நடைபெருததற்கான நிகழ்தகவு (வாய்ப்பு) $= \dfrac{m}{m + n}$

என்றாகும். இவ்வாறு கணிதவியல் முறைப்படி நிகழ்தகவினை வரையறுக்கமுடியும் என அறிகிறோம். இம்முறை வரைவிலக்கணத்தை லாப்லாசின் முதல் தத்துவம் என்று கூறுவர்.

இங்கு ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறும் முன்னரே அந்நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு கணக்கிடப்படுவதால், இந்நிகழ்தகவை "முன்-நிகழ்தகவு" என்றும் கூறுவர்.

குறிப்பு : (அ) பொதுவாக, ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவை p எனவும், நடைபெறாததற்கான நிகழ்தகவை q எனவும் குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

ஆகையால் $p = \dfrac{m}{m+n}$; $q = \dfrac{n}{m+n}$

அதாவது,

$$p = \frac{E\text{-ன் சாதக நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை}}{E\text{-ன் எல்லாவித நிகழ்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$q = \frac{E\text{-ன் பாதக நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை}}{E\text{-ன் எல்லாவித நிகழ்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

மேலும்

$$p + q = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n}$$

$$= \frac{m+n}{m+n}$$

$$\text{i.e., } p + q = 1$$

$$\therefore \quad q = 1 - p$$

(ஆ) $\dfrac{m}{n}$-ஐ, E என்ற நிகழ்ச்சியின் சாதக விகிதம் (odds in favour of the event) என்றும், $\dfrac{n}{m}$-ஐ அதன் பாதக விகிதம் (odds against the event) என்றும் கூறுவோம்.

(இ) $n=0$ ஏனில், $p=1$ அதாவது நிகழ்ச்சி, E நடப்பது உறுதி. $m=0$ ஏனில், $p=0$ எனவே நிகழ்ச்சி E நடைபெறாது.

$m=n$ எனில், நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கும், நடைபெறாம லிருப்பதற்கும் சமவாய்ப்புகள் உண்டு என்று பொருளாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்:

1. ஒரு நாணயத்தை சுண்டிவிடுவோமானால் பூ அல்லது தலை என்ற இருவேறு நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு களைக் காண்க.

$$\text{நிகழ்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை} = 2$$

$$\text{பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்வின் எண்ணிக்கை} = 1$$

$$\therefore \quad \text{பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு (நி.. த)} = \frac{1}{2}$$

|||ly தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{1}{2}$ என்றாகும்.

2. ஒரு பகடையை உருட்டி விடுவோமானால், அதன் ஆறுபக்கங்களில் ஏதேனும் ஒன்றுமேல் பக்கமாக அமையும். அப்பக்கத்தில் 1 முதல் 6 வரை உள்ள முழு எண்களுள் ஏதேனும் ஒன்று குறிக்கப்பட்டிருக்கும். அதாவது ஒவ்வொரு எண்ணும் குறிக்கப்பட்டிருப்பதற்கான வாய்ப்பு சமமாக இருக்கும்.

எனவே நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை = 6 இவற்றுள், குறிப்பாக 5 என்ற எண் குறிக்கப் பட்டிருப்பதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை = 1

ஆகையால் '5' கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{1}{6}$

இதேபோன்று எந்த ஒரு எண்ணும் கிடைப்பதற்காக நிகழ்தகவும் $= \dfrac{1}{6}$ என்று அறியலாம்.

3. ஒரு வட்டமேஜையில் 12 பேர் உட்காரலாம். அவர்களுள் குறிப்பிட்ட இருவர் அடுத்தடுத்து உட்காருவதற்கான சாதக விகிதம் என்ன ?

அடுத்தடுத்து உட்காரவேண்டிய இருவரையும் x, y என்க. ஆகையால் x ஏதேனும் ஒரு இடத்தில் உட்கார்ந்தபின், மீதியுள்ள 11 இடங்களுள் ஏதேனும் ஒன்றில் y உட்காரலாம்.

அதாவது y உட்காருவதற்கான மொத்த வழிகள் $= 11$

அவற்றுள் x அடுத்து உட்கார்ந்திருப்பதற்கான மொத்த வழிகள் $= 2$

$\therefore$ இருவரும் அடுத்தடுத்து உட்காருவதற்கான நி.த. $= \frac{2}{11}$

i.e., அவர்கள் அடுத்தடுத்து உட்காருவதற்கான சாதக விகிதம் $= \frac{2}{9}$.

4. இரண்டு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டும்போது கிடைக்கப்பெறும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 9 ஆக இருப்பதற்கான சாதக விகிதத்தைக் காண்க.

எவ்வொரு பகடையின் பக்கங்களிலும் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற ஆறு எண்கள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். அவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு எண் மேல் பக்கத்தில் கிடைப்பதற்கான மொத்த வழிகள் 6 ஆகும். இதேபோன்று இரண்டாவது பகடையின் மேல் பக்கத்தில் ஒரு எண் அமைவதற்கான மொத்த வழிகளும் 6 என்று தெரியும்.

மேலும் முதல் பகடையிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் ஒவ்வொரு எண்ணையும், இரண்டாவது பகடையிலுள்ள 6 எண்களுடனும் ஆறு வெவ்வேறு வழிகளில் சேர்க்கலாம். இவ்வாறு முதல் பகடையிலுள்ள எல்லா 6 எண்களையும் சேர்ப்பதற்கான மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை, $6 \times 6 = 36$ ஆகும்.

இவற்றுள், இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 9 என பின்வரும் வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றின் மூலம் கிடைக்கலாம்.

அதாவது, முதல் பகடையில் 6 என்ற எண்ணும், இரண்டாவது பகடையில் 3 என்ற எண்ணும் கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சியை (6, 3) என்று குறிப்பிடுவோமானால்,

(6, 3), (5, 4), (4, 5), (3, 6) என்ற நான்கு வழிகளும் 9 என்ற கூட்டுத்தொகையைக் கொடுக்கும்.

ஆகையால் இரண்டு பகடைகளிலிருந்தும் கிடைக்கப்பெறும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 9 ஆக இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

i.e., கூட்டுத்தொகை 9 கிடைப்பதற்கான சாதக விகிதம் $= \frac{1}{8}$

5. ஒரு பையில் 6 பச்சைநிறப்பந்துகளும், 9 சிவப்புநிறப் பந்துகளும் உள்ளன. அவற்றுள் 4 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால், அவை நான்கும் பச்சையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? நான்கும் சிவப்பாக இருப்பதற்கான பாதக விகிதம் என்ன?

பையிலுள்ள பந்துகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 15$

இவற்றுள் ஏதேனும் நான்கை எடுப்பதற்கான வெவ்வேறு வழி-களின் எண்ணிக்கை $\Big\} = {}^{15}C_4$

6 பச்சைப் பந்துகளிலிருந்து 4 எடுப்பதற்கான வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கை $\Big\} = {}^{6}C_4$

$\therefore$ 4 பச்சைப்பந்துகள் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4}$

$$= \frac{1}{91}$$

111^{rly} 4 சிவப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \frac{{}^{9}C_4}{{}^{15}C_4}$

$$= \frac{42}{455}$$

i.e., 4 சிவப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்கான பாதக விகிதம் $\Big\} = \frac{413}{42}$

என்றாகும்.

6. "சிவக்குமார்" என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துக்களை வரிசை மாற்றம் செய்தால், (*i*)-"கு" என்ற எழுத்து முதலில் வரக்கூடிய வார்த்தைகள் கிடைப்பதற்கான; (*ii*)-"சி" என்ற எழுத்து முதலிலும், 'ர்" என்ற எழுத்து இறுதியிலும் வரக்கூடிய வார்த்தைகள் அமைவதற்கான; (*iii*) "சிவ" என்ற எழுத்துக்கள் இதே வரிசையில் சேர்ந்திருக்குமாறு உள்ள வார்த்தைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடி.

(*i*) "சிவக்குமார்" என்ற வார்த்தையிலுள்ள மொத்த எழுத்துக்கள் $= 6$

∴ இவை அனைத்தையும் வரிசைமாற்றம் செய்யக் கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை. $= \angle 6$

'கு' எழுத்து முதலில் இருக்க, மீதியுள்ள 5 எழுத்துக்களையும் வரிசைமாற்றம் செய்யக்கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை. $= \angle 5$

∴ "கு"-வை முதலெழுத்தாக உடைய வெவ்வேறு வார்த்தைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{\angle 5}{\angle 6}$

$$= \frac{1}{6}$$

(*ii*) இங்கும் நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான எல்லாவித வெவ்வேறு வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை. $= \angle 6$

'சி' முதலிலும், 'ர்' இறுதியிலும் அமைந்து, மீதியுள்ள 4 எழுத்துக்களையும் வரிசைமாற்றம் செய்யக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= \angle 4$

∴ தேவையான வார்த்தைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு. $= \dfrac{\angle 4}{\angle 6}$

$$= \frac{1}{30}$$

(*iii*) "சிவ" என்ற எழுத்துக்கள் ஒன்றுகவே வர வேண்டுமாதலின் அவற்றை ஒரே எழுத்தெனக் கொள்ளலாம். ஆகையால் மொத்த எழுத்துக்கள் 5 என்று கருத வேண்டும்.

∴ இந்த 5 எழுத்துக்களையும் வரிசைமாற்றம் செய்யக்கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= \angle 5$

எனவே தேவையான வார்த்தைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு. $= \dfrac{\angle 5}{\angle 6}$

$$= \frac{1}{6}$$

1·3-3 நிகழ்தகவின் கணிதவியல் விதிகள்: அடிப்படைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நிகழ்தகவைக் கணக்கிடும் முறையைப்பற்றி இது காறும் பார்த்தோம் தனி நிகழ்ச்சி களாக இருக்கும்போது இம்முறை எளிதாக இருக்கும். ஆனால் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளாகவோ அல்லது சார்புடை நிகழ்ச்சி களாகவோ கொக்கப்படின், நிகழ்தகவின் வரைவிலக்கணத்தை மட்டும் பயன்படுத்தி, அதன் மதிப்பைக் கணக்கிடுதல் கடினமாக இருக்கும். ஆகையால் பின்வரும் தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தினால், கணித இயல் முறைப்படி நிகழ்தகவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுதல் மிகவும் எளிதாகிவிடும்.

இங்கு பயன்படுத்தப்படும் குறியீடுகள் வருமாறு :

(*i*) E எனும் நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவை $P(E)$ என்ற குறியீட்டாலும்,

அந் நிகழ்ச்சி நிகழாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவை $P(\bar{E})$ என்ற குறியீட்டாலும் குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

இங்கு $\bar{E}$-ஐ E-க்கு எதிரான நிகழ்ச்சி என்றும் கூறுவர்.

(*ii*) $P(E_1 + E_2)$ என்ற குறியீடு, E_1 அல்லது E_2 அல்லது இவ்விரண்டு நிகழ்ச்சிகளுமே நிகழ்வதன் நிகழ்தகவைக் குறிக்கும்.

(*iii*) $P(E_1 E_2)$ என்பது E_1, E_2 என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுமே ஒரே நேரத்தில் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்கும்.

$P(E_1 \bar{E}_2)$ என்பது E_1 எனும் நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்து, அதே சமயத்தில் E_2 நிகழாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்கும்.

(*iv*) E_1 என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்த பின், E_2 என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவைக் குறிப்பிட

$P(E_2/E_1)$ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம். இதே போன்று, E_1, E_2 என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்ந்த பிறகு தான் E_3 எனும் நிகழ்ச்சி நிகழும் என்பதைக் குறிப்பிட

$P(E_3/E_1E_2)$ என்ற குறியீடு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

1·3-4 தேற்றம் 1 : கூட்டுத் தேற்றம், அல்லது லாப்லாசின் 2-ம் தத்துவம் (Addition Theorem, or Second Principle of Laplace)

ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுடைய நிகழ்ச்சிகள் பலவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்று நடந்தேறுவதற்கான நிகழ்தகவு, அந் நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் நடைபெறுவதற்கான பல்வேறு வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையை N எனக் கொள்வோம். இதில் $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_k$ என்ற நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான சாதக வழிகளின் எண்ணிக்கைகளை முறையே $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_k$ என்று கொள்வோம். மேலும் இந் நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் நிகழ சமவாய்ப்புள்ளது எனக் கருதுவோம்.

இவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையன என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழுங்கால், வேறு எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியும் நிகழ முடியாது. ஆகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று அல்லது பிறிதொன்று நிகழுவதற்கான சாதக வழிகளின் எண்ணிக்கை $(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n)$ என்றாகும். எனவே ஏதேனும் ஒரு அல்லது வேறொரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(E_1 + E_2 + E_3 + E_k) = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_k}{N}$$

$$= \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N} + \ldots\ldots + \frac{m_k}{N}$$

ஆனால் $\frac{m_1}{N}, \frac{m_2}{N}, \ldots\ldots \frac{m_k}{N}$ என்பன முறையே $E_1, E_2 \ldots\ldots E_k$ என்ற நிகழ்ச்சிகள் தனித்தனியே நிகழுவதற்கான நிகழ்தகவுகளாகும்.

$$\therefore\ P(E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots + E_k) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_k)$$

கிளைத்தேற்றங்கள்

(அ) E என்ற நிகழ்ச்சி $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_k$ எனும் ஒன்றையொன்று விளக்கும் தன்மையுடைய n நிகழ்ச்சிகளால் ஆனது

எனக்கொள்வோம். அதாவது இந்த n நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்ந்தால், E-ம் நிகழ்வதாகக் கொள்ளவேண்டும்.

அதாவது, $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots + E_n$ என்றிருக்கும்.

$$\therefore\ P(E) = P(E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots + E_n)$$
$$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots\ldots + P(E_n)$$

மேலும் $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_n$ என்பன விரிவான நிகழ்ச்சிகளாயுமிருப்பின், அவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வது உறுதி எனத் தெரியும்.

$$\therefore\ P(E) = 1$$
$$ie,\ P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ldots + P(E_n) = 1$$

(ஆ) கூட்டுத்தேற்றத்தின் பொதுவுரை: இங்கு E_1 என்ற நிகழ்ச்சியை E_1, E_2 என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுமே நிகழ்தல்; E_1 நிகழ்ந்து E_2 நிகழாதிருத்தல் என்று இரண்டு வகையாகப் பிரிக்கலாம்.

மேலும், $E_1 E_2, E_1 \bar{E}_2$ என்ற கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் விரிவானவை என்றும், ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையன என்றும் நமக்குத் தெரியும்.

ஆகையால், $P(E_1) = P(E_1 E_2) + P(E_1 \bar{E}_2)$

இதேபோன்று, $P(E_2) = P(E_2 E_1) + P(E_2 \bar{E}_1)$

$$= P(E_1 E_2) + P(E_2 \bar{E}_1)$$

$$\therefore\ P(E_1) = P(E_2) = P(E_1 E_2) + [P(E_1 E_2) + P(E_1 \bar{E}_2) + P(E_2 \bar{E}_1)]$$

மேலும் கூட்டுத் தேற்றப்படி,

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1 \bar{E}_2) + P(E_2 \bar{E}_1) + P(E_1 E_2)$$

எனவே $P(E_1) + P(E_2) = P(E_1 E_2) + P(E_1 + E_2)$ என்றாகும்.

$$ie,\ P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2) \ldots\ldots (1)$$

(இங்கு E_1, E_2 என்பன ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.)

அடுத்து, E எனும் நிகழ்ச்சி E_2, E_3 என்பனவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வதைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது முடிவு (1)-ஐப் பயன்படுத்தி,

$$P(E_1 + E) = P(E_1) + P(E) - P(E_1 E)$$ என்று

கிடைக்கும்.

$$\text{ie } P(E_1 + E_2 + E_3) = P(E_1) + P(E_2 + E_3) - P[E_1 (E_2 + E_3)]$$

$$= P(E_1) + P(E_2) + (E_3) - P(E_2 E_3) - P[E_1 E_2 + E_1 E_3]$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_2 E_3) - [P(E_1 E_2) + P(E_1 E_3) - P(E_1 E_2 E_3)]$$

$$\therefore \quad P(E_2 + E_3 + E_3) = \sum_{i=1}^{1} P(E_i) - \sum_{i \neq j}^{3} P(Ei\, Ej) + P(E_1 E_2 E_3) \quad (i \neq j) \quad \ldots\ldots (2)$$

இம்முடிவை n நிகழ்ச்சிகளுக்கும் விரித்துக் கூற முடியும்.

இவ்வாறு

$$P(E_1 E_2 E_3 + \ldots + E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i,j=1}^{n} P(Ei\, Ej) + \sum_{i,j\,k=1}^{n} P(E_i E_j E_k) - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} P(E_1 E_2 E_3 \ldots\ldots E_n) \ldots\ldots (3)$$

இங்கு வலது புறத்தில் 1, 2, 3 ...... n என்ற எண்களை இரண்டிரண்டாக சேர்க்கக் கூடிய சேர்வுகள் அனைத்தும் இரண்டாவது கூட்டுத்தொகையிலும்; அவ்வெண்களை மூன்று மூன்றாகச் சேர்க்கும்

சேர்வுகள் அனைத்தும் மூன்ருவது கூட்டுத்தொகையிலும், இதே போன்று அடுத்தடுத்துள்ள கூட்டுத்தொகைகளிலும் சேர்வுகள் உள்ளன என்று அறியலாம். மேலும், இந்த n நிகழ்ச்சிகளும் கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் நிகழ்ச்சிகள் என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

ஆனல் இவை அனைத்தும் ஒன்றையொன்று விலக்குவன வாயின்,

$$P(E_i E_j) = O_0 \ (i \neq j) \quad P(E_i E_j E_k) = O, \ (i \neq j \neq k) \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad P(E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n)\ P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ldots + P(E_n)$$

1·3-5 தேற்றம் 2 பெருக்குத் தேற்றம் அல்லது லாப்லாசின் மூன்ரும் தத்துவம் (Multiplication Theorem or Third Principle of Laplace): பல சார்பிலா வெவ்வேறு துணை நிகழ்ச்சிகளால் அமையப்பெறும் ஒரு கூட்டு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு அந்த துணை நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்குத்தொகைக்குச் சமம்

இதைப் பின்வருமாறும் கூறலாம்.

பல சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஒருங்கே நிகழ்வதற்கான நிகழ் தகவு அச்சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம்.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளை $E_1, E_2, \ldots\ldots E_k$ என்க. E_1 எனும் நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான பலவேறு சாதக வழிகளின் எண்ணிக்கையை m_1 என்றும்; E_2 நிகழ்வதற்கான சாதக வழிகளின் எண்ணிக்கையை m_2 என்றும்; இதே போன்று பொதுவாக E_k நிகழ்வதற்கான சாதக வழிகளின் எண்ணிக்கையை m_k என்றும் கொள்வோம். இங்கு E_1 என்ற நிகழ்ச்சி நிகழக் கூடிய ஒவ்வொரு வழிக்கும் ஏற்ப, E_2 நிகழ்ச்சியும் நிகழ m_2 வழி) கள் உள்ளன. ஆகையால் E_1 நிகழக்கூடிய எல்லா m_1 வழி களுக்கும் ஏற்ப, E_2-ம் நிகழ $m_1 \cdot m_2$ சாதகவழிகள் உள்ளன. இதேபோன்று $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots E_k$ என்ற எல்லா நிகழ்ச்சிகளும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்கான சாதக வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots\ldots m_k$ என்று தெரியும்.

மேலும் $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots E_k$ எனும் நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான எல்லாவித வெவ்வேறு வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கைகளை முறையே $N_1, N_2, N_3 \ldots\ldots N_k$ எனக்கொள்வோம். ஆகையால் இந்நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்கான எல்லாவித வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \ldots\ldots N_k$ என்றாகும். எனவே $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots E_k$ அனைத்தும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(E_1 E_2 E_3 \ldots\ldots E_k) = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots\ldots m_k}{N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \ldots\ldots N_k}$$ என்று கிடைக்கும்.

அதாவது, E என்பது இக்கூட்டு நிகழ்ச்சியைக் குறிக்குமாயின்,

$$P(E) = \frac{m_1}{N_1} \cdot \frac{m_2}{N_2} \cdot \frac{m_3}{N_3} \quad \frac{m_k}{N_k}$$
$$= P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) \ldots\ldots P(E_k)$$

நிரூபணம் (பிறிதொரு முறை)

இத்தேற்றம், முதலில் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுக்கு உண்மையென நிறுவலாம். அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளையும் E_1, E_2 என்க. அவை நிகழ்வதற்கான சாதக வழிகளின் எண்ணிக்கைகளை முறையே m_1, m_2, நிகழாத வழிகளின் எண்ணிக்கைகளை முறையே n_1, n_2 எனவும் கொண்டால்,

$$P(E_1) = \frac{m_1}{m_1 + n_1}; \quad P(E_2) = \frac{m_2}{m_2 + n_2}$$ என்று தெரியும்.

மேலும் அந்நிகழ்ச்சிகள் பின்வரும் நான்கு வழிகளில் நிகழக்கூடும்.

1. E_1, E_2 இரண்டுமே நிகழுதல். இது $m_1 \cdot m_2$ வழிகளில் நிகழும்.

2. E_1 நிகழ்ந்து E_2 நிகழாதிருத்தல். இது $m_1 \cdot n_2$ வழிகளில் நிகழும்.

3. E_1 நிகழாது E_2 நிகழுதல். இது $n_1 \cdot m_2$ வழிகளில் நிகழும்.

4. E_1, E_2 இரண்டுமே நிகழாதிருத்தல். இது $n_1 \cdot n_2$ வழிகளில் நடைபெறும். ஆகையால் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்கான மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை,

$$= m_1 \cdot m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1 + n_1 \cdot n_2$$
$$= (m_1 + n_1)(m_2 + n_2).$$

எனவே இரண்டும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(E_1 E_2) = \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + n_1)(m_2 + n_2)}$$
$$= \left(\frac{m_1}{m_1 + n_1}\right) \cdot \left(\frac{m_2}{m_2 + n_2}\right)$$
$$= P(E_1) \cdot P(E_2).$$

இம்முடிவை இரண்டுக்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கும் இதே போன்று நிரூபிக்க முடியும். இவ்வாறு,

$P(E_1 E_2 \ldots E_k) = P(E_1) \cdot P(E_2) \ldots P(E_k)$ என்று அறியலாம்.

குறிப்பு (அ) E_1, E_2 என்பன சார்புடை நிகழ்ச்சிகளாயினும், இத்தேற்றம் உண்மையாகும் என்பதை அடுத்துவரும் தேற்றத்தின் மூலம் அறியலாம். ஆனால், அங்கு ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்த பிறகு தான் அடுத்த நிகழ்ச்சி நடைபெறும் என்ற நிபந்தனையைக் கொள்ள வேண்டும்.

(ஆ) E_1, E_2 என்ற நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவுகளை முறையே p_1, p_2 என்று கொள்வோம். பின் E_1 நிகழ்ந்து, E_2 நிகழாமலிருத்தலின் நிகழ்தகவு $p_1 \cdot (1 - p_2)$ என்றும், E_2 நிகழ்ந்து E_1 நிகழாமலிருத்தலின் நிகழ்தகவு $p_2 \cdot (1 - p_1)$ என்றும், E_1, E_2 இரண்டுமே நிகழாமலிருத்தலின் நிகழ்தகவு $(1 - p_1)(1 - p_2)$ என்றும் அறியலாம்.

எனவே, கூட்டுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, E_1, E_2 என்ற நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று மட்டும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு,

$= p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1) = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$ என்று கிடைக்கப்பெறும்.

இதேபோன்று, குறைந்தது ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தக்வு,

$= 1 - [(1 - p_1)(1 - p_2)] = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ என்றாகும்

இம்முடிவை விரித்துக்கூற, $p_1, p_2 \dots p_n$ என்ற நிகழ்தகவுகளை உடைய, முறையே $E_1, E_2 \dots E_n$ என்ற நிகழ்ச்சிகளுள் குறைந்தது ஒன்றேனும் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$ என்று கிடைக்கும்.
அதாவது,

$$P(E_1 + E_2 + \dots E_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{\substack{i, j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} p_i p_j + \dots + (-1)^{n-1} p_1 \cdot p_2 \dots p_n.$$

இவ்வாறு பெருக்குத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவதன்மூலம், கூட்டுத் தேற்றத்தின் பொதுவுரையைப் பெறலாம் எனக் காண்கிறோம்.

1·3·6 தேற்றம் 3. நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவுத் தேற்றம் (Theorem On Conditional Probability) E_1, E_2 என்ற ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் ஒருங்கே நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பு, E_1-ன் நிகழ்தகவு, E_1 நிகழ்ந்தபின் E_2-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு ஆகிய வற்றின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம்.

நிரூபணம்

E_1, E_2 என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் நடைபெறுவதற்கான சாதக, பாதக வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையை N என்க. அதாவது, இந்த N வெவ்வேறு சரிசம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகளுள், ஒரு சில E_1 என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதையும் வேறு சில E_2 நிகழ்வதையும், இன்னும் சில E_1, E_2 இரண்டுமே நிகழ்வதையும் குறிப்பனவாகும்.

இவற்றுள் E_1 நடைபெறுவதற்கான சாதக வழிகளின் எண்ணிக்கையை m என்போம். இந்த m வழிகளுள், E_1, E_2 இரண்டுமே நடைபெறுவதற்கான வழிகளும் அடங்கும். இரண்டும் சேர்ந்து நிகழ்வதற்கான இந்த சாதக வழிகளின் எண்ணிக்கையை m_1 என்க.

எனவே, $P(E_1 E_2) = \frac{m_1}{N} = \frac{m_1}{m} \cdot \frac{m}{N}$

$$= P(E_2/E_1) \cdot P(E_1).$$

அதாவது, $P(E_1 E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1)$

குறிப்பு: (அ) இங்கு E_1, E_2 என்பன சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாயின்,

$P(E_2/E_1) = P(E_2)$ என்று தெரியும்.

எனவே $P(E_1 E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

(ஆ) இதே போன்று, E_2 நிகழ்ந்தபின், E_1 நிகழுமாயின்,

$P(E_1 \cdot E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1/E_2)$ என்று நிறுவலாம்.

(இ) இம் முடிவுகளை விரித்துக் கூற,

$P(E_1 E_2 E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) \cdot P(E_3/E_1 E_2)$ என்று கிடைக்கும்.

ஏனெனில்,

$P(E_2 E_3/E_1) = P(E_2/E_1) \cdot P(E_3/E_1 E_2)$ என்பதால்

$$P(E_1 E_2 E_3) = P[(E_1 E_2 E_3)]$$
$$= P(E_1) \cdot P(E_2 E_3/E_1)$$
$$= P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) \cdot P(E_3/E_1 E_2)$$

1.3.7 தேற்றம் 4: கூட்டு நிகழ்ச்சித் தேற்றம் (Theorem On Compound Events): ஒரு முயற்சியைப் பல முறை செய்யுங்கால், ஒரு நிகழ்ச்சி வெற்றி அடைதல் சில தடவைகளும், தோல்வியுறுதல் அல்லது வெற்றியடையாதிருத்தல் வேறு சில தடவைகளும் நிகழலாம். அந் நிகழ்ச்சி ஒரு முறை வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவை p என்ற மாறு எண் எனவும், அது வெற்றியடையாதிருத்தலுக்கான நிகழ்தகவை q என்றும் குறிப்பிட்டால், $p + q = 1$ என்று தெரியும்.

எனவே n வெவ்வேறு முயற்சிகளுள், r முயற்சிகளில் மட்டும் அந்நிகழ்ச்சிக்கு வெற்றி உண்டாகுமானால், அந்த நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $n_{cr} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$ என்பதாகும்.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட n முயற்சிகளுள், ஒவ்வொரு முறையும் ஒரு நிகழ்ச்சி வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு p என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், r தனித்தனி முயற்சிகளில் அந் நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு.

$= P \cdot P \ldots\ldots r$ காரணிகள் வரை

$= P^r$ என்று கிடைக்கும்.

இதே போன்று, மீதியுள்ள $(n-r)$ முயற்சிகளில் அந் நிகழ்ச்சி நிகழாதிருப்பதற்கான (அதாவது நிகழ்ச்சி தோல்வியுறுவதற்கான) நிகழ்தகவு q^{n-r} என்று அறியலாம்.

எனவே குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி n முயற்சிகளுள் r-ல் வெற்றியடைவதற்கும், மீதியுள்ள முயற்சிகளில் தோல்வியடைவதற்கும் தகுந்த நிகழ்தகவு

$= p^r q^{n-r}$ என்று கிடைக்கும்.

ஆனால் n முயற்சிகளுள் ஏதேனும் r முயற்சிகளை n_{cr} வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். எனவே கூட்டுத் தேற்றப்படி, அந்நிகழ்ச்சிக்கு n முயற்சிகளுள், r-ல் வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$n_{cr} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$ என்றாகும்.

குறிப்பு : (அ) n முயற்சிகளுள் ஒன்றில் கூட அந்நிகழ்ச்சி வெற்றியடையாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= n_{c0} \cdot p^0 \cdot q^{n-0}$

$= q^n$ ஆகும்.

இதே போன்று ஏதேனும் ஒரு முயற்சியில் மட்டும் வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$= n_{c_1} \cdot p \cdot q^{n-1}$

ஏதேனும் இரண்டு முயற்சிகளில் மட்டும் வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு

$= n_{c_2}\, p^2 \cdot q^{n-2}$

இதே போன்று இன்ன பிற நிகழ்தகவுகளும் கிடைக்கப் பெறும்.

(ஆ) இவ்வாறு, n முயற்சிகளுள், ஒன்றில் கூட வெற்றி யடையாதிருப்பதற்கான, ஏதேனும் ஒன்று, இரண்டு, மூன்று ..... எல்லா முயற்சிகளிலும் வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகள், $(q+p)^n$-என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவில் உள்ள அடுத்தடுத்துள்ள முறையான உறுப்புக்களாகும் என்று காண்கிறோம். அதாவது, 0, 1, 2, 3, ... n தடவைகளில், குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான (அல்லது வெற்றியடை வதற்கான) நிகழ்தகவுகள் முறையே $(q+p)^n$-ன் விரிவிலுள்ள உறுப்புக்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. இரண்டு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டும்போது கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 10 என்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(x, y) என்ற குறியீடு முதல் பகடையிலிருந்து x என்ற எண்ணும் இரண்டாவது பகடையிலிருந்து y என்ற எண்ணும் கிடைப்பதைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

எனவே, இரண்டு பகடைகளை உருட்டும்போது கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 10 என்றமையுமாறு. (6, 4), (5, 5), (4, 6) என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கும் 3 நிகழ்ச்சிகள் நிகழக் கூடும். ஆனால் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் நிகழ்வதற்கான மொத்த வழிகள் $6 \times 6 = 36$ என்று தெரியும்.

ஆகையால் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியிலும் 10 என்ற கூட்டுத் தொகை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{36}$

மூன்று நிகழ்ச்சிகளிலிருந்தும் 10 என்ற கூட்டுத்தொகை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$

$$= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

2. ஒருபையில் 6 வெள்ளைப் பந்துகளும், 8 சிவப்புப் பந்து களும், 7 பச்சை பந்துகளும் உள்ளன. அப்பையிலிருந்து

ஏதேனும் ஒருபந்து எடுத்தால், அது வெள்ளையாகவோ அல்லது சிவப்பாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

பையிலுள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 21$

வெள்ளைப் பந்துகளிலிருந்து ஏதேனும் ஒன்று எடுப்பதற்கான மொத்த வழிகள் $= 6$

∴ ஒரு வெள்ளைப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{21}$

111^{rly} ஒரு சிவப்புப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{8}{21}$

எனவே பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் ஒரு பந்து வெள்ளையாகவோ அல்லது சிவப்பாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{21} + \frac{8}{21}$

$$= \frac{2}{3}$$

3. முதல் 18 இயற்கை எண்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ள 18 சீட்டுகளை நன்றாகக் குலுக்கியபின், ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அச்சீட்டில் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண் 5-ன் மடங்காகவோ அல்லது 7-ன் மடங்காகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{18}$ என்றுகாட்டு.

மொத்த சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 18$

ஐந்தின் மடங்கு எண்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ள சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 3$

எனவே இவ்வெண்கள் குறிக்கப்பட்ட சீட்டுகளில் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{18}$

111^{rly} ஏழின் மடங்கு எண்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ள சீட்டுகளில் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{18}$

ஆகையால் 5 அல்லது 7-ன் மடங்கு எண் குறிக்கப்பட்ட சீட்டுகளுள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{18} + \frac{2}{18}$

$$= \frac{5}{18}$$

4. நான்கு சிவப்புப் பந்துகளும், ஐந்து கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து, ஒன்றன்பின் ஒன்றாக மூன்று கறுப்புப் எடுக்கப்படுகின்றன. ஒருமுறை பந்துகள் எடுக்கப்படும் பந்தை பையினுள்.

(i) திரும்பவும் வைத்துவிட்டால், (ii) திரும்ப வைக்கா விட்டால், நிகழ்தகவு என்ன ?

பையிலுள்ள மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 9

∴ அவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றை எடுப்பதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 9_{c_1} = 9$

5 கறுப்புப் பந்துகளிலிருந்து ஏதேனும் ஒன்றை எடுப்பதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 5_{c_1} = 5$

∴ ஒரு கறுப்புப் பந்து எடுப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \frac{5}{9}$

(i) எடுத்த பந்தைத் திரும்பவைத்தல்

முதலில் எடுக்கும் பந்தை திரும்பவைத்துவிட்டால், பையிலுள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கை மாறாது. ஆகையால் ஒவ்வொரு முறையும் ஒரு கறுப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவும் மாறாமலிருக்கும். எனவே ஒன்றன்பின் ஒன்றாக மூன்று கறுப்புப் பந்துகளை எடுக்கும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலாதனவையாகையால், அதற்கான

நிகழ்தகவு $= \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}$

$= \frac{125}{729}$

(ii) எடுத்த பந்தைத் திரும்பவைக்காதிருத்தல்

முதலில் எடுக்கும் கறுப்புப் பந்தை திரும்பவைக்காவிடில், இரண்டாவதுமுறை ஒரு கறுப்புப் பந்து எடுக்கும்போது, பையில் 4 சிவப்புப் பந்துகளும், 4 கறுப்புப் பந்துகளும் தான் இருக்கும்.

$\therefore$ இரண்டாவதுமுறை ஒரு கறுப்புப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

111^{rly} மூன்ருவதுமுறை ஒரு கறுப்புப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{3}{7}$

இம்மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலாதனவையாதலால், ஒன்றன் பின் ஒன்ருக மூன்று கறுப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவின்

$$\text{மதிப்பு} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$$

$$= \frac{5}{42}$$

5. ஒரு சீரான நாணயத்தை மூன்றுமுறை சுண்டிவிடும் போது பூ, தலை மாறி மாறி, அடுத்தடுத்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

இங்கு பூ—தலை—பூ அல்லது தலை—பூ—தலை என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கும் இரண்டு வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிகள் நிகழலாம்.

ஒரு முறை பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

ஒரு முறை தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும் $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ முதல் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

111^{rly} இரண்டாவது நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவும் $\Big\} = \frac{1}{8}$

எனவே, இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பு $\Big\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

$$= \frac{1}{4}$$

6. ஒரு பையில் 5 சிவப்பு, 7 பச்சைப் பந்துகளும் மற்றொரு பையில் 6 சிவப்பு, 9 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன. இப்பைகளுள் ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டால், அப் பந்து பச்சையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

இரண்டு பைகளுள் ஏதேனும் ஒன்றை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{1}{2}$

∴ முதல் பையிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}$

$$= \frac{7}{12}$$

111[rly] இரண்டாவது பையிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{15}$

$$= \frac{3}{10}$$

மேலும் இவ்விரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுடையன.

ஆகையால் இரண்டு பைகளுள் ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{7}{24} + \frac{3}{10}$$

$$= \frac{71}{120}$$

7. ஐந்து சமச்சீரான நாணயங்களைச் சுண்டிவிட்டால், மூன்று பூக்கள் மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவையும், அதிக அளவு மூன்று பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவையும் காண்க.

மொத்த முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை, $n = 5$

ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் பூ கிடைப்பதன் நிகழ்தகவு, p $\Big\} = \frac{1}{2}$

(i) ஆகையால் 5 முயற்சிகளில் மூன்று பூக்கள் கிடைப்பதன் நிகழ்தகவு $\Big\} = 5_{c_3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-3}$

$$= \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2^5}$$

$$= \frac{5}{16}.$$

(ii) அதிக அளவு 3 பூக்கள் கிடைக்க வேண்டுமாயின், 0, 1, 2, 3 பூக்கள் கிடைக்கக்கூடிய 4 வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிகள் நிகழலாம்.

பூவே கிடைக்காமலிருப்பதன் நிகழ்தகவு $= 5_{c_0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5$

ஒரு பூ கிடைப்பதன் நிகழ்தகவு $= 5_{c_1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4$

2 பூக்கள் கிடைப்பதன் நிகழ்தகவு $= 5_{c_2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$

3 பூக்கள் கிடைப்பதன் நிகழ்தகவு $= 5_{c_3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$

ஆகையால் 0, 1, 2, 3 முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றின் மூலம் வெற்றி கிடைப்பதன் நிகழ்தகவு $\Bigg\} = \left(5_{c_0}+5_{c_1}+5_{c_2}+5_{c7}\right)\frac{1}{2^5}$

அதாவது அதிக அளவு 3 பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Bigg\} = (1+5+10+10)\cdot\frac{1}{2^5}$

$$= \frac{13}{16}$$

8. ஒரு விளையாட்டுப் போட்டியில் A-க்கு எதிராக B வெற்றியடைவதற்கான வாய்ப்பு விகிதம் $\frac{1}{3}$ எனில், 6 போட்டிகளுள் குறைந்தது 4-ல் A வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

A-ன் வெற்றி வாய்ப்பை p எனவும், B-ன் வெற்றி வாய்ப்பை q எனவும் குறிப்பிட்டால், $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ என்றாகும்.

எனவே 6 5, அல்லது 4 போட்டிகளில் A வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 6_{c_6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 6_{c_5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 6_{c_4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3^6} [2^6 + 6 \quad 2^5 + 15 \cdot 2^4]$$

$$= \frac{496}{729}$$

9. கொடுக்கப்பட்ட மூன்று பைகளுள், ஒன்றில் ஒரு சிவப்புப் பந்தும் இரண்டு பச்சைப் பந்துகளும, மற்றொன்றில் இரண்டு சிவப்புப் பந்துகளும் மூன்று பச்சைப் பந்துகளும், மூன்ருவது பையில் மூன்று சிவப்புப்பந்துகளும், நான்கு பச்சைப் பந்துகளும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பையிலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டால், எடுக்கப்படும் மூன்று பந்துகளுள் ஒரு சிவப்பு, இரண்டு பச்சைப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

இந்நிகழ்ச்சி பின்வரும் மூன்று வெவ்வேறு வழிகளில் நடைபெறலாம். முதல் பையிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தையும், மற்றுமுள்ள இரண்டு பைகளிலிருந்தும் இரண்டு பச்சைப் பந்துகளையும் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{105}$$

இதேபோன்று, இரண்டாவது பையிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தையும், ஏனைய பைகளிலிருந்து இரண்டு பச்சைப் பந்துகளையும் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{105}$$

அடுத்து; மூன்ருவது பையிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தையும், முதலிரண்டு பைகளிலிருந்தும் இரண்டு பச்சைப் பந்துகளையும் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{105}$$

ஆனால் இம்மூன்றுவகை நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுடையன எனவே குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நடை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$p = \frac{12}{105} + \frac{16}{105} + \frac{18}{105} = \frac{46}{105}$$

1·3-8 நிகழ்தகவின் நடைமுறை வரைவிலக்கணம்: இதுகாறும் ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறும் முன்னரே, அந் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்பை எவ்வாறு கணக்கிடலாம் என்பதை அறிந்தோம் அம்முறைப்படி நிகழ்தகவு கணக்கிடப் படும்போது நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் சம வாய்ப்புடையன வாய் இருத்தல் வேண்டும். ஆனால், பொதுவாக உலகில் நிகழும் நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் சம வாய்ப்புடையனவாய் இருத்தல் அரிது. இவ்வாறு கணித இயல் முறைப்படி நிகழ்தகவை கணக்கிடுதல் எல்லா சூழ்நிலைகளுக்கும் எல்லாவிதமான நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொருந்தாது எனக் கண்டு கொள்ளலாம் எனவே புள்ளியியலில், நிகழ்தகவைக் கணக்கிட பரிசோதனை முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இங்கு ஒரு பரிசோதனையை அல்லது முயற்சியை மிக அதிகமான தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்து, அச் சோதனைகளில், குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி வெற்றியடையும் நிகழ்வெண்களைக் (Frequency of success) குறித்துக் கொள்ளல் வேண்டும். பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கையை மேலும், மேலும் அதிகரித்தோமானால், அந்நிகழ்ச்சி வெற்றியடையும் நிகழ்வெண்களுக்கும், பரிசோதனைகளின் மொத்த எண்ணிக்கைக்கும் இடையே உள்ள விகிதமானது ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லையை நோக்கிக் குவியும் என்று கண்டு கொள்ளலாம், அந்த குறிப்பிட்ட எல்லையின் மதிப்பை (எண்ணை) அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதன் நிகழ்தகவு என்று கொள்கிறோம்.

உதாரணமாக, ஒரே சீரான நாணயம் ஒன்றை 1000 முறை சுண்டினால், ஏறக்குறைய 522 முயற்சிகளில் பூ மட்டும் கிடைக்கும் எனவும், மேலும் 1000 முறை சுண்டினால் ஏறக்குறைய 513 முயற்சிகளில் பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{522}{1000} = 0{\cdot}522$ என்றும், 2000 முயற்சிகளில் பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1009}{2000} = 0{\cdot}504$ என்றும் அறிகிறோம்.

முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை மேலும் அதிகரித்தோமானால் இவ்விகிதத்தின் மதிப்பு 0·5-ஐ அணுகும் என்று அறியலாம். அதாவது ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் போது பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என்று தெரிகிறது. ஆனால் அந் நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டினால் பூ கிடைக்காமலிருக்கலாம் ; அல்லது 9 முறை சுண்டினால் 6 முயற்சிகளில் பூ கிடைக்காமலிருக்கலாம். எனினும் மிகப்பல முயற்சிகளுள் பூவும் தலையும் ஏறக்குறைய சம எண்ணிக்கையில் கிடைக்கப் பெறும் என்பதை பரிசோதனைகளின் மூலம் நிரூபித்துள்ளனர். அதாவது N என்பது ஒரு மிகப் பெரிய எண்ணாக இருப்பின், ஒரு நாணயத்தை N தடவைகள் சுண்டும்போது, ஏறக்குறைய $\frac{N}{2}$ தடவைகளில் பூ மட்டும் கிடைக்கும் என்று பொருளாகும்.

இவ்வாறு, ஒரு தனிப்பட்ட சோதனையிலிருந்து, அல்லது குறிப்பிட்ட ஒரு சில சோதனையிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் முடிவுகள் எந்த ஒரு ஒழுங்கு முறையின் அடிப்படையிலும் அமையாவிடினும், மிகப் பல அல்லது எண்ணிலடங்கா முயச்சிகளின் முடிவுகள் ஏதேனும் ஒரு ஒழுங்கு முறைப்படி அமையும் என்று அறிகிறோம். பரிசோதனைகளின் இத்தன்மையை "புள்ளியியல் ஒழுங்குவிதி" (Law of Statistical Regularity) என்று கூறப்படும்.

1-3-9. நிகழ்தகவு காணும் முறை: மேல்கூறிய முறைப்படி, பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான சார் நிகழ் வெண்ணையே (Relative Frquency) அந்நிகழ்ச்சியின் தோராய அல்லது பட்டறி முறை நிகழ்தகவு எனப்படும். மேலும் பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கையை அளவிடமுடியாதவாறு அதிகரிக்கும்போது, இச் சார் நிகழ்வெண் ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லையை நோக்கிக் குவியும். அந்த எல்லையைத்தான் அந் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்கிறோம்.

E_j என்பது ஒரு பரிசோதனையின் விளைவாக கிடைக்கப் பெறும் நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று எனக் கொள்வோம் அவ்வித N பரிசோதனைகளுள், m_i தடவைகள் E_i என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதாகக் கொண்டால், $\frac{m_i}{N}$ என்ற விகிதத்தை E_i நிகழ்வதற்கான சார் நிகழ் வெண் என்கிறோம். ஆகையால் E_i-ன் தோராய நிகழ்தகவு $= \frac{m_i}{N}$ என்பதாகும்

$P(E_i)$ என்பது E_i-ன் நிகழ்தகவைக் குறிப்பின்,

$$P(E_i) = \underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m_i}{N}\right)$$ என்று வரையறுக்கிறோம்.

(இதை, $P_i = \underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m_i}{N}\right)$ என்று குறிப்பிடலாம்.)

குறிப்பு: இந்த முறையைப்பின் பற்றியும். கணிதவியல் முறைப்படியும் நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுதல் கொள்கை அளவில் மாறுபட்டிருப்பினும், நடைமுறையில் ஒன்றாக இருக்கும் என்று கண்டுள்ளனர். மேலும் கூட்டுத் தேற்றம், பெருக்குத் தேற்றம் முதலியனவற்றை இம் முறைப்படியும் நிரூபிக்கலாம் என்பதையும் பின் வருவனவற்றிலிருந்து அறியலாம்.

(அ) கூட்டுத் தேற்றம்

N பரிசோதனைகள் அடங்கிய ஒரு தொடரில், குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி, E_i நடைபெறுவதற்கு m_i வெவ்வேறு வழிகள் உள்ளன என்போம். ஆகையால் இந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு,

$$P(E_i) = \underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m_i}{N}\right)$$ என்றாகும்.

மேலும், $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_k$ என்ற வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று நடைபெறுவதற்கான வெவ்வேறு வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots m_k)$ என்று தெரியும். எனவே இந்த k நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று அல்லது வேறொன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_k) = \underset{N\to\infty}{Lt} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{N}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left[\underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m_i}{N}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} [P(E_i)]$$

i.e., $P(E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ldots + P(E_k)$

(ஆ) பெருக்குத் தேற்றம்

குறிப்பிட்ட பரிசோதனைகள் (அல்லது முயற்சிகள்) T_1, T_2 என்பனவற்றின் விளைவாக கிடைக்கப் பெறும் நிகழ்ச்சிகளை முறையே E_1, E_2 என்க. இத்தகைய N ஜோடி முயற்சிகள் அடங்கிய ஒரு தொடரில், E_1 மட்டும் நிகழ m வெவ்வேறு வழிகளும், இவற்றுள் E_1, E_2 இரண்டுமே நிகழ m_1 வழிகளும் உள்ளன எனக் கொள்வோம். இங்கு E_1 என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறும் m வழிகளுள் m_1 வழிகளும் அடங்கியுள்ளன. எனவே இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு பின் வருமாறு.

அதாவது, $$P(E_1 E_2) = \underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m_1}{N}\right)$$

$$= \underset{N\to\infty}{Lt} \left[\left(\frac{m_1}{m}\right)\cdot\left(\frac{m}{N}\right)\right]$$

$$= \underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m_1}{m}\right)\cdot \underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m}{N}\right)$$

இங்கு E_1-ன் நிகழ்தகவு பூச்சியமாக இராவிடில், N முடிவிலியை அணுகும் போது m-ம் முடிவிலியை அணுகும் என்பது நன்கு விளங்கும்.

மேலும், $\underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m}{N}\right) = E_1$-ன் நிகழ்தகவு என்றும்,

$\underset{N\to\infty}{Lt} \left(\frac{m_1}{m}\right) = E_1$ நிகழ்ந்த பின், E_2-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு என்று தெரியும்.

ஆகையால், $P(E_1 E_2) = P(E_2/E_1)\cdot P(E_1)$

அதாவது. $P(E_1 E_2) = P(E_1)\cdot P(E_2/E_1)$

குறிப்பு: (*i*) $P(E_1 E_2) = P(E_1)\cdot P(E_2)$ என்றிருப்பின், E_1, E_2 என்ற நிகழ்ச்சிகள் "புள்ளியியல் முறைப்படி சார்பிலாதன" (அல்லது தனித்தன்மை உடையன) என்று கூறப்படும்.

$$(ii) \quad P(E_i E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j), \ (i \neq j);$$

$$P(E_i E_j E_k) = P(E_i) P(E_j) P(E_k), (i \neq j \neq k)$$

இது போன்ற இன்ன பிற முடிவுகளும் உண்மையெனில், $E_1, E_2, \ldots\ldots E_n$ என்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலாதன என்று கூறப்படும்.

(*iii*) ஆனால் பல நிகழ்ச்சிகள் கொடுக்கப்பட்டு, அவற்றுள் எந்த இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலாதனவாயிருப்பின், அந் நிகழ்ச்சிகளை ஜோடிச் சார்பிலாதன (Pair-wise Independent) என்கிறோம். அதாவது $P(E_i E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j)$ $(i \neq j)$ என்ற நிபந்தனை மட்டும் உண்மையாயிருக்குமாறு $E_1, E_2, \ldots E_n$ என்ற நிகழ்ச்சிகள் அமையுமாயின், அந்நிகழ்ச்சிகளை ஜோடிச் சார்பிலாதன என்று அழைக்கிறோம்.

(இ) எதிர் மறை (நேர்மாறு) நிகழ்தகவு பெய்ஸின் தேற்றம் (Bayes' Theorem)

$E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots E_n$ என்ற ஜோடிச் சார்பிலா n நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்றுடன் சேர்ந்துதான் E எனும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுமானால், E நிகழ்ந்தபின் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி E_i நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(E_i/E) = \frac{P(E_i) \cdot P(E/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i) \cdot P(E/E_i)}$$ என்றாகும்,

நிரூபணம்

$E_1, E_2, \ldots\ldots E_n$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்றுடன் சேர்ந்துதான் E எனும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுமாதலால்,

$$P(E) = P(E E_1) + P(E E_2) + \ldots\ldots + P(E E_n)$$

மேலும் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவுத் தேற்றப்படி,

$$P(E E_i) = P(E_i) \cdot P(E/E_i) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$III^{rly} \ P(E E_i) = P(E) \cdot P(E_i/E) \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\therefore \ P(E) = P(E_1) \cdot P(E/E_1) + P(E_2) \cdot P(E/E_2) + \ldots + P(E_n) \cdot P(E/E_n) \quad \ldots\ldots (3)$$

மேலும் (1), (2)-லிருந்து,

$$P(E_i/E) = \frac{P(E_i) \cdot P(E/E_i)}{P(E)} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

எனவே (3), (4)-லிருந்து.

$$P(E_i/E) = \frac{P(E_i) \cdot P(E/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i) \cdot P(E/E_i)}$$ என்று கிடைக்கும்.

குறிப்பு : இங்கு E_1, E_2 ...... E_n என்ற ஜோடிச் சார்பிலா n நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று நிகழ்ந்ததன் விளைவாக E நிகழ்வதைக் காண்கிறோம். ஆகையால் இந்த n நிகழ்ச்சிகளை "காரணங்கள்" அல்லது "எடுகோள்கள்" (Causes of Hypothesis) என்பர். மேலும் $P(E_i)$-ஐ முன் நிகழ்தகவு என்றும், $P(E/E_i)$-ஐ பின் நிகழ்தகவு என்றும் கூறுவர்.

E எனும் நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்தபின் E_i நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவைக்காண இச்சூத்திரம் பயன்படுவதால், இதை "பின் நிகழ்தகவு சூத்திரம்" என்றும் அழைப்பதுண்டு.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. ஒரு கல்லூரியிலுள்ள இளம் அறிவியல் மாணவர்களில் 25%-ம், இளங்கலை மாணவர்களில் 40%-ம் கால் பந்து விளையாடத் தெரிந்தவர்கள். அவர்களுள் யாரேனும் ஒருவரை குழுத்தலைவராக தேர்ந்தேடுத்தால், அவர் அறிவியல் மாணவ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (இங்கு இருபிரிவினரும் சமமாக உள்ளனர் எனக் கொள்க).

கால் பந்து விளையாட்டுக் குழுத்தலைவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியை E என்க. அவர் அறிவியலிளுள்ளவர் என்பதை E_1 என்றும் இளங்கலையைச் சார்ந்தவர் என்பதை E_2 என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

$\therefore \; P(E_1) = \frac{1}{2} = P(E_2)$ (இரு பிரிவினரும் சமமாக இருப்பதால்)

மேலும் $P(E/E_1) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$$P(E/E_2) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

எனவே $$P(E_1/E) = \frac{P(E_1) \cdot P(E/E_1)}{P(E_1) \cdot P(E/E_1) + P(E_2) \cdot P(E/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)}$$

$$= \frac{5}{13}$$

2. மூன்று பைகளுள்; ஒன்றில் 1 வெள்ளைப் பந்தும், 2 சிவப்புப் பந்துகளும், 3 கறுப்புப் பந்துக்களும், இரண்டாவது பையில் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 சிவப்புப் பந்துகளும், 1 கறுப்புப் பந்தும், மூன்ருவது பையில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், 1 சிவப்புப் பந்தும், 2 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஏதேனும் ஒரு பையிலிருந்து, ஒரு வெள்ளைப் பந்தும், ஒரு சிவப்புப் பந்தும் எடுக்கப் பட்டால், அப் பந்துகள் இரண்டாவது பையிலிருந்து எடுக்கம் படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

கொடுக்கப்பட்ட 3 பைகளையும் எடுக்கும் நிகழ்ச்சிகளை E_1, E_2, E_3 என்றும், ஒரு வெள்ளைப் பந்தையும், ஒரு சிவப்புப் பந்தையும் எடுக்கும் நிகழ்ச்சியை E என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

3 பைகளுள் ஒன்றை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3}$

முதல் பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளை, ஒரு சிவப்புப் பந்துகளை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(E/E_1) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{15}$$

$$= \frac{2}{1}$$

III^{rly} $P(E/E_3) = \frac{2}{5}$

$P\ (E/E_3) = \frac{1}{5}$ என்று நிறுவலாம்.

$\therefore\ P\ (E_3/E) =$

$$\frac{P(E_3) \cdot P(E/E_3)}{P(E_1) \cdot P(E/E_1) + P(E_2) \cdot P(E/E_2) + P(E_3) \cdot P(E/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{6}{11}$$

குறிப்பிட்ட இலக்கை நோக்கிச் சுட 3 துப்பாக்கிகள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. அத் துப்பாக்கியிகளிலிருந்து கிளம்பும் குண்டுகள் இலக்கைத் தாக்குவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0·2, 0·25, 0·3 என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அந்த இலக்கை ஒரு குண்டு தாக்கினுல் அது மூன்ருவது துப்பாக்கிலிருந்து வந்த குண்டுதான் என்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{2}$ என்று காட்டு,

மூன்ருவது துப்பாக்கியிலிருந்து குண்டு வீசப்படும் நிகழ்ச்சிகளை E_1, E_2, E_3 என்றும், இலக்கைக் குண்டினுல் தாக்கும் நிகழ்ச்சியை E என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

ஆகையால் $P\ (E_1) = P\ (E_2) = (E_3) = \frac{1}{3}$ என்று அறியலாம்.

மேலும் $P\,(E/E_1) = 0{\cdot}2 = \frac{1}{5}$

$$P\ (E/E_2) = 0{\cdot}25 = \frac{1}{4}$$

$$P\ (E/E_3) = 0{\cdot}3 = \frac{3}{10}$$

எனவே $P\ (E_3/E) = \dfrac{P\ (E_3) \cdot P\ (E/E_3)}{P(E_1)\ P(E/E_1) + P(E_2) \cdot P(E/E_2) + P(E/E_3)}$

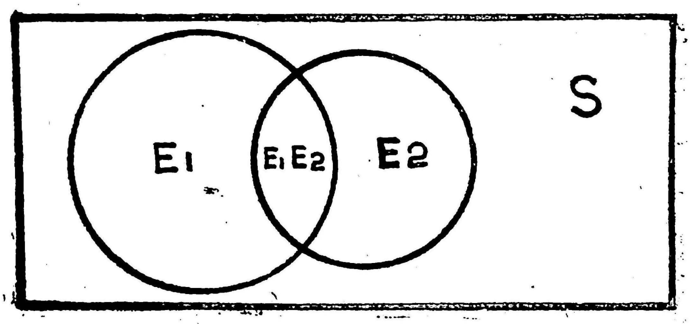
$$= \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}\right)}{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}\right)}$$

$$= \frac{2}{}$$

1·4-0 புள்ளிக்கணக் கொள்கைக்கும், நிகழ்தகவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

அல்லது

நிகழ்தகவின் வரை கணித விளக்கம் (Relation between Point-set Theory and Probability or Geometrical Interpretation) நவீன நிகழ்தகவுக் கொள்கைப்படி, ஒரு பரிசோதனையின் விளைவுகளை அல்லது முடிவுகளை சூழ்வெளியிலுள்ள புள்ளிகளால் குறிப்பிடுகின்றனர். குறிப்பிட்ட பரிசோதனையைப் பொறுத்து இந்த வெளி ஒரு பரிமாண, இரிபரிமாண, அல்லது முப்பரிமாண வெளியாக இருக்கக் கூடும். பொதுவாக n-பரிமாண வெளியாக வும் இருக்கலாம். இப் புள்ளிகளை "கூறுபுள்ளிகள்" என்றும், புள்ளிகளின் தொகுதி அடங்கிய சூழ்வெளியை "கூறுவெளி" என்றும் அழைக்கின்றனர்.



படம் 1.

கூறு வெளியை S என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். S-ல் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை முடிவுடையதாகவோ, அல்லது முடிவற்றதாகவோ இருக்கலாம். முடிவுடைய எண்ணிக்கையுள்ள

புள்ளிகளடங்கிய வெளியாக S இருந்தால், அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றுடனும் ஒரு குறைவிலா எண்ணை (non-negative number) தொடர்பு படுத்தக் கூடும். இத்தகைய எண்கள் அணைத்தின் கூட்டுத்தொகை " ஒன்று " என இருத்தல் வேண்டும். இந்த எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் " நிகழ்தகவு " என்றும், S-ல் உள்ள புள்ளிகளின் தொகுதியை அல்லது கணத்தை " ஒரு நிகழ்ச்சி " என்றும் கூறுவர். படத்தில் உள்ள E_1, E_2 என்ற இரண்டு கணங்களும் இருவேறு நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன. இவ்வாறு S, E_1, E_2 முதலியனவற்றைக் குறிக்கும் படத்தை " ஆயிலர் வரைபடம் " அல்லது " வெண் வரைப்படம் " (Euler Diagram, or Venn Diagram) என்று பெயரிட்டுள்ளனர். உதாரணமாக,

(அ) ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் பரிசோதனையில், S என்ற வெளி, பூ, தலை ஆகியவற்றை குறிக்கும் ஒரே நேர் கோட்டின் மீது அமையும் இரண்டு புள்ளிகளால் ஆனது. பூ கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியினை E_1 என்றும், தலை கிடைப்பதை E_2 என்றும் குறிப்பிடலாம்,

(ஆ) ஆனால் இரண்டு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டும்போது, S என்பது, (பூ, தலை), (பூ, பூ) (தலை, பூ), (தலை, தலை) என்ற முடிவுகளைக் குறிக்கும், ஒரே தளத்தின் மீது அமையும், நான்கு புள்ளிகளால் ஆனது.

(இ) இதேபோன்று இரண்டு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டும்போது, S என்பது $6 \times 6 = 36$ புள்ளிகளால் ஆன வெளியாக இருக்கும்.

படத்தில் காணப்படும் கணம் E_1-ல் உள்ள, அல்லது கணம் E_2-ல் உள்ள, அல்லது இரண்டிலும் உள்ள புள்ளிகளின் கணத்தைக் குறிப்பிட $(E_1 + E_2)$ என்ற அடையாளத்தையும் E_1, E_2 இரண்டிற்கும் பொதுவான புள்ளிகளைக் கொண்ட கணத்தையும் குறிப்பிட $(E_1 E_2)$ என்ற அடையாளத்தையும் பயன் படுத்துதல் வழக்கமாக உள்ளது.

1.4-1 வரையறை : E_1 எனும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு, E_1-ல் உள்ள எல்லா புள்ளிகளுடனுமே தொடர்பு படுத்தப் பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம் இதை $P(E_1)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

இதேபோன்று $(E_1 + E_2)$ என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $(E_1 + E_2)$ எனும் கணத்திலுள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கு ஒப்பான நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகையாகும். இதைத் குறிப்பிட $P(E_1 + E_2)$ என்ற அடையாளம் பயன் படுத்தம் படுகிறது.

இவ்வாறு' $P(E_1 E_2)$ என்ற நிகழ்தகவானது, E_1, E_2 இரண்டு கணங்களுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் எல்லாவற்றுடனும் தொடர்பு படுத்தப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும் என வரையறுக்கிறோம்.

இவற்றிற்கு பின்வரும் விளக்கங்களும் தரச்கூடும் அதாவது, E_1 எனும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு, கணம் E_1-ல் உள்ள எல்லா புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை, சூழ்வெளி S-ல் உள்ள எல்லா புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் விகிதத்திற்குச் சமமாக என்றும் கூறலாம்.

E_1 என்ற கணத்திலுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட. $n(E_1)$ என்ற குறியீடு பயன்படுத்தப் படுகிறது. இதை கணம் E_1-ன் அளவு (measure of E_1) என்றும் கூறுவர். இதே போன்று $n(S)$ என்பது S எனும் வெளியிலுள்ள எல்லா கூறு புள்ளிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

ஆகையால், $P(E_1) = \dfrac{n(E_1)}{n(S)}$ என்று அறியலாம்.

111^{rly} $P(E_1 + E_2) = \dfrac{n(E_1 + E_2)}{n(S)}$; $P(E_1 E_2) = \dfrac{n(E_1 E_2)}{n(S)}$

என்றாகும்.

1·4·2 இம்முறையைப் பின்பற்றி, ஒருசில நிகழ்தகவு தேற்றங்களை எவ்வாறு நிரூபிக்கலாம் என்பதை இனி பார்ப்போம்.

அ. கூட்டுத்தேற்றம்

இங்கு E_1, E_2 என்ற கணங்களுக்கிடையே பொதுவான புள்ளிகள் இருக்கின்றன எனக் கொள்வோமாயின், வென் வரைபடத்திலிருந்து,

$n(E_1 + E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 E_2)$ என்று தெரிகிறது.

ஆகையால், $\dfrac{n(E_1 + E_2)}{n(S)} = \dfrac{n(E_1)}{n(S)} + \dfrac{n(E_2)}{n(S)} - \dfrac{n(E_1 E_2)}{n(S)}$

அதாவது, $P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$.
ஆனால் E_1, E_2 என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின் அவற்றிற்கிடையே பொதுவான புள்ளிகள் இருக்க முடியாது.

$$\therefore \quad n(E_1 E_2) = 0; \text{ எனவே } P(E_1 E_2) = 0$$

ஆகையால், $P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ என்றாகும்.

அதாவது, ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுடைய இரு வேறு நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று அல்லது பிறிதொன்றின் நிகழ்தகவு அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

(ஆ) நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு

E_1 என்ற நிகழ்ச்சி நடந்தபிறகு, E_2-ம் நிகழ்வதற்கான நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவை,

$$P(E_2/E_1) = \frac{n(E_1 E_2)}{n(E_1)} \text{ என்று வரையறுக்கிறோம்.}$$

(இ) பெருக்குத் தேற்றம்

E_1, E_2 என்பன ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்சிகளாயின், அவை இரண்டும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு பின்வருமாறு.

$$P(E_1 E_2) = \frac{n(E_1 E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(E_1 E_2)}{n(E_1)} \cdot \frac{n(E_1)}{n(S)}$$

$$i.e., P(E_1 E_2) = P(E_2/E_1) \cdot P(E_1).$$

$$= P(E_1) \cdot P(E_2/E_1)$$

111^{rly} $P(E_1 E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1/E_2)$ என்றும் நிறுவலாம்.
மேலும் E_1, E_2 சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாயின்,

$P(E_2/E_1) = P(E_2)$, $P(E_1/E_2) = P(E_1)$ என்று தெரியும்.
எனவே, $P(E_1 E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$ என்றாகும்.

அதாவது, இரண்டு சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஒருங்கே நிகழ்வதற்கான கூட்டு நிகழ்தகவு, அந்நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

குறிப்பு (i) இவ்வாறு கூறுவெளியை அறிமுகப்படுத்துவதன் மூலம் நிகழ்தகவினை எளிதில் புரிந்துகொள்ளவும், நிகழ்தகவுக்கு வரை கணித விளக்கம் அளிக்க முடியும் என்று நன்கு விளங்குகிறது.

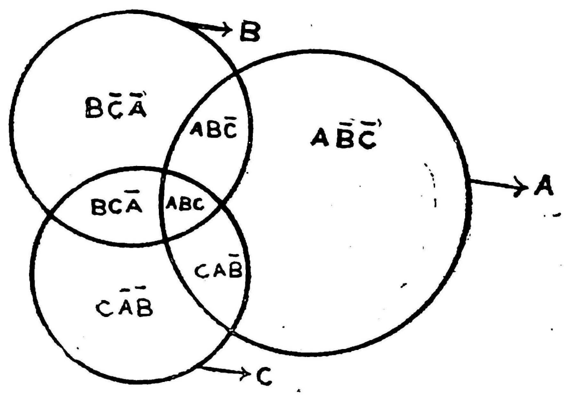
மேலும், இங்கு சூழ்வெளி S-ல் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை முடிவுடையது என்று எடுத்துக் கொண்டோம். ஆனால் எண்ணிலடங்கா புள்ளிகளையுடைய வெளியாக S-இருந்த போதிலும், நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்தகவுத் தேற்றங்களை நிறுவ முடியும்

(ii) $(E_1 + E_2)$ என்ற கணியத்தை $E_1 \cup E_2$ என்ற குறியீட்டாலும், $(E_1 E_2)$ என்ற கணியத்தை $E_1 \cap E_2$ என்ற குறியீட்டாலும் குறிப்பிடலாம். இவற்றை முறையே E_1, E_2 இரண்டின் ஒன்றியம் (Union of E_1 and E_2) என்றும், பொதுமை (intersection) என்று அழைக்கப்படும்.

(iii) ஏதேனும் ஒரு கணத்தில் ஒரு புள்ளியேனும் இராவிடில் அத்தகைய கணத்தைப் பூச்சியக் கணம் (Null Set) என்று கூறுவர். இக்கணத்தைக் குறிப்பிட ϕ எனும் எழுத்தைப் பயன்படுத்துவர். $n(\phi) = 0$ என்றிருப்பதால், $P(\phi) = 0$ என்றாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. கூறுவெளியைப் பயன்படுத்தி, A, B, C என்பன ஏதேனும் 3 நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A + B + C) = P(A) + P(B)$



படம் 2.

$+ P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$ என்று நிறுவுக.

படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு A, B, C என்பன மூன்று வெவ்வேறு புள்ளி கணங்கள் என்க. $A\,B\,\bar{C}$ என்ற குறியீடு கணங்கள் A, B-க்குப் பொதுவான ஆனுல் கணம் C-ல் இல்லாத புள்ளிகளின் கணத்தைக் குறிக்கும். இதேபோன்று மற்ற குறியீடுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மேலும் $A\,B\,C$ என்பது A, B, C மூன்று கணங்களுக்கும் பொதுவான புள்ளிகளால் ஆன கணம் எனப்படும். இம்மூன்று கணங்களும் அடங்கிய சூழ்வெளியை S என்க.

இப்படத்திலுள்ள துணை கணங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 7 என்று தெரிகிறது. ஆகையால் A, B, C ஆகிய மூன்று கணங்களிலும் உள்ள புள்ளிகளின் கூட்டுத் தொகை, இந்த ஏழு கணங்களிலும் உள்ள எல்லா புள்ளிகளின் மொத்த எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

அதாவது, $n(A+B+C) = n(A\bar{B}\bar{C}) + n(B\bar{C}\bar{A}) + n(C\bar{A}\bar{B})$
$+\, n(AB\bar{C}) + n(BC\bar{A}) + n(CA\bar{B}) + n(ABC)$.

இதன் இருபுறமும் $n(S)$-ல் வகுக்க பின்வரும் முடிவு கிடைக்கும்.

எனவே $P(A+B+C) = P(A\bar{B}\bar{C}) + P(B\bar{C}\bar{A})$
$+\, P(C\bar{A}\bar{B}) + P(AB\bar{C}) + P(BC\bar{A}) + P(CA\bar{B}) + P(ABC)$ ...(i)

அடுத்து, $A\bar{B}\bar{C}$ என்ற கணத்திலுள்ள புள்ளிகளைக் கணக்கிட, A-ல் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து, A, B-க்குப் பொதுவாக உள்ள புள்ளிகளையும், A, C-க்குப் பொதுவாக உள்ள புள்ளிகளையும நீக்க வேண்டும்.

ஆனுல் இவ்வாறு செய்யும்போது, A, B, C மூன்று கணங்களுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் இரண்டு முறை நீக்கப்படுகின்றன, எனவே,

$n(A\bar{B}\bar{C}) = n(A) - n(AB) - n(AC) + n(ABC)$ என்ருகும்.

இதிலிருந்து,

$$\left.\begin{aligned} P(A\bar{B}\bar{C}) &= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) \\ \text{llly } P(B\bar{C}\bar{A}) &= P(B) - P(BC) - P(BA) + P(ABC) \\ P(C\bar{A}\bar{B}) &= P(C) - P(CA) - P(CB) + P(ABC) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(2)$$

மேலும்,

$n(BC\bar{A}) = n(BC) - n(ABC)$ என்றிருப்பதால்

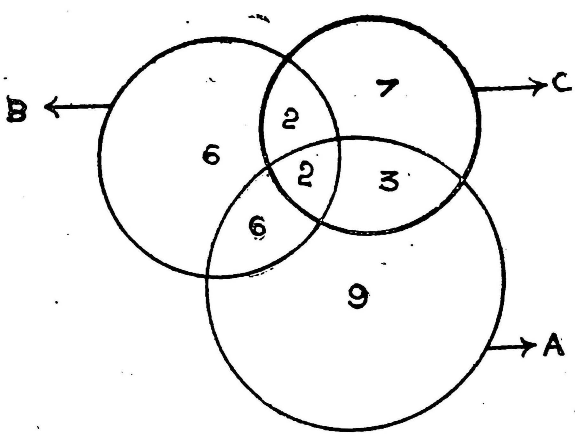
$$P(BC\bar{A}) = P(BC) - P(ABC)$$
இ'ly $$P(CA\bar{B}) = P(CA) - P(ABC) \qquad \ldots(3)$$
$$P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC)$$

முடிவுகள் (1). (2), (3)-லிருந்து தேவையான முடிவு கிடைக்கும். அதாவது, $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$

(இங்கு $P(AB)$ என்று எடுத்துள்ளோம்)

2. சென்னையிலிருந்து வெளிவரும் A, B, C எனும் மூன்று பத்திரிக்கைகளை படிப்பவர்கள் பற்றிய விவரங்களை தயாரித்ததில் பின் வரும் முடிவுகள் கிடைக்கப் பெற்றன.

A எனும் பத்திரிக்கையைப் படிப்பவர்கள்	=	20%
B எனும் பத்திரிக்கையைப் படிப்பவர்கள்	=	16%
C எனும் பத்திரிக்கையைப் படிப்பவர்கள்	=	14%
A, B இரண்டையும் படிப்பவர்கள்	=	8%
B, C இரண்டையும் படிப்பவர்கள்	=	4%
C, A இரண்டையும் படிப்பவர்கள்	=	5%
மூன்று பத்திரிக்கைகளையும் படிப்பவர்கள்	=	2%



படம் 3.

இதில் குறைந்தது ஒரு பத்திரிக்கையாகிலும் படிப்பவர்கள் எத்தனை சதவீதம்? A, அல்லது B அல்லது இரண்டையும் படிப்பவர்கள் எத்தனை சதவீதம்?

A, B, C என்ற பத்திரிக்கைகளை படிப்பவர்களின் எண்ணிக்கையை, படத்திலுள்ள A, B, C என்ற கணங்கள் சதவீதத்தில் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

ஆகையால் $n(A) = 20,\ n(B) = 16,\ n(C) = 14$
$n(AB) = 8\ \ n(BC) = 4,\ n(CA) = 5$
மேலும் $n(ABC) = 2.$

$$\therefore\ n(A\bar{E}\bar{C}) = n(AB) - n(ABC)$$
$$= 8 - 2$$
$$= 6$$

$|||^{riy}$ $n(BC\bar{A}) = 2$ என்றும், $n(CA\bar{B}) = 3$ என்றும் தெரிகிறது.
அடுத்து $n(A\bar{B}\bar{C}) = n(A) - n(AB) - n(AC) + n(ABC)$
$$= 20 - 8 - 5 + 2$$
$$= 9$$
111^{riy} $n(B\overline{C}\overline{A}) = 6,\ n(C\bar{A}\bar{B}) = 7$ என்று நிறுவலாம்.

(i) குறைந்தது ஒரு பத்திரிக்கையாகிலும் படிப்பவர்களின் சதவீதம் $= n(A + B + C)$

ஆனால், $n(A + B + C) = 7$ துணைகணங்களிலுள்ள புள்ளிகளின் கூடுதல்.
$$= 35$$

அதாவது 35% குறைந்தது ஒரு பத்திரிக்கையாகிலும் படிக்கக் கூடியவர்கள்.

(ii) A, அல்லது B, அல்லது இரண்டையுமே படிப்பவர்களின் சதவீதம் $= n(A + B)$

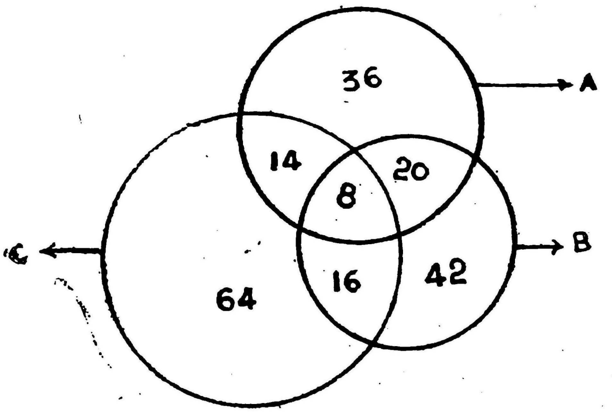
ஆனால் $n(A + B) = n(A) + n(B) - n(AB)$
$$= 20 + 16 - 8$$
$$= 28$$

அதாவது 28% A, B இரண்டையுமோ, அல்லது அவற்றுள் ஒன்றையோ படிக்கக்கூடியவர்கள் எனத்தெரிகிறது.

3. 200 பட்டப்படிப்பு மாணவர்களுக்கிடையே நடந்த தேர்தலில் போட்டியிட்ட A, B, C என்ற மூவருக்கும் கிடைத்த வாக்குச் சீட்டுகளின் விவரம் பின்வருமாறு.

A, B இருவரையும் ஆதரித்தவர்கள்	=	24
A அல்லது B-ஐ ஆதிரித்து, C-ஐ ஆதரிக்காதவர்கள்	=	98
B அல்லது C-ஐ ஆதரித்து, A-ஐ ஆதரிக்காதவர்கள்	=	122
A, C இருவரையும் ஆதரிந்து, B-ஐ ஆதரிக்காதவர்கள்	=	18
B-ஐ மட்டும் ஆதரித்தவர்கள்	=	42
C-ஐ மட்டும் ஆதரித்தவர்கள்	=	64

இதிலிருந்து எத்தனை மாணவர்கள் மூவரையும் ஆதரித்தனர் என்றும்; A, B இருவரையும் ஆதரிந்து C-ஐ ஆதரிக்காதவர்கள் எத்தனை மாணவர்கள் என்றும், ஒரே ஒருவரை மட்டும் ஆதரித்தவர்கள் எத்தனைபேர் என்றும் கண்டுபிடி.



படம் 4.

படத்திலுள்ள A, B, C என்ற மூன்று கணங்களும் A, B, C என்ற மூன்று மாணவர்களுக்கும் கிடைத்த வாக்குச் சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கைகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். பின் வழக்கமான குறியீட்டினைப் பயன்படுத்தி, பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$n(AB) = 28;\ n[(A+B)\bar{C}] = 98;\ n[(BC)\bar{A}] = 122$$
$$n(AC\bar{B}) = 14;\ n(B\overline{CA}) = 42;\ n(C\overline{AB}) = 64$$

படத்திலிருந்து,

$$\begin{aligned} n[(B+C)\bar{A}] &= n(B\bar{A} + C\bar{A}) \\ &= n(BC\bar{A}) + n(B\overline{CA}) + n(C\overline{AB}) \end{aligned}$$

அதாவது, $$122 = n(BC\bar{A}) + 42 + 64$$

$\therefore \quad n(BC\bar{A}) = 16$

மேலும் $n[(A+B)\bar{C}] = n[A\bar{C} + B\bar{C}]$

$= n(A\bar{C}\bar{B}) + n(B\bar{C}\bar{A}) + n(AB\bar{C})$

ie $\quad 98 = n(A\bar{C}\bar{B}) + 42\, n(AB\bar{C})$

$n(ABC) + n(A\bar{B}\bar{C}) = 56$

மேலும் $n(A+B+C) = n(A\bar{B}\bar{C}) + n(B\bar{C}\bar{A}) + n(C\bar{A}\bar{B})$

$+ n(AB\bar{C}) + n(BC\bar{A}) + n(CA\bar{B}) + n(ABC)$

i.e., $\quad 200 = [\, n(A\bar{B}C) + n(ABC)\,] + n(BCA)$

$+ n(B\bar{C}A) + n(CA\bar{B}) + n(CA\bar{B}) + n(ABC)$

$= [56] + 42 + 16 + 64 + 14 + n(ABC)$

எனவே, $n(ABC) = 8$

அதாவது மூவரையும் ஆதரித்தவர்களின் எண்ணிக்கை = 8

அடுத்து, $n(AB\bar{C}) = n(AB) - n(ABC)$

$= 28 - 8$

$= 20$

அதாவது A, B இருவரையும் ஆதரித்து C-ஐ

ஆதரிக்காதவர்கள் = 20

ஒரே ஒருவரைமட்டும் ஆதரித்தவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $\Big\} = n(A\bar{B}C) + n(BCA) + n(\bar{C}A\bar{B})$

$= 36 + 42 + 64$

$= 142$

பயிற்சி 1.

1. ஒரே சீரான நாணயம் ஒன்றை இரண்டு தடவைகள் சுண்டினால், குறைந்தது ஒரு பூ கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க. $\left[\text{விடை: } \frac{3}{4}\right]$

2. சமச் சீரான நாணயங்கள் மூன்று ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. மூன்றும் பூவாகவோ அல்லது தலையாகவோ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? $\left[\text{விடை: } \frac{1}{4}\right]$

3. ஒரே மாதிரியுள்ள இரண்டு பகடைகளை உருட்டிவிடும் போது இருமை எண்கள் கிடைப்பதன் நிகழ்தகவு என்ன? மேலும்

அப்பகடைகளின் மேல் முகங்களின் மீது குறியிடப்பட்டுள்ள இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 7 என இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவையும் கண்டுபிடி. [விடை: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$]

4. சமமான மூன்று பகடைகளை ஒரு முறை உருட்டும்போது கிடைக்கப்பெறும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை 15-ஐ விட அதிகமாக இருக்குமானால், நிகழ்தகவு என்ன ?

[விடை: $\frac{5}{108}$]

5. நன்றாகக் குலுக்கப்பட்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து, 4 சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு வகையைச் சேர்ந்தவைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

[விடை: $\frac{13^4}{52C_4}$]

6. நால்வர் விளையாடும் ஒரு சீட்டாட்டத்தில், குறிப்பிட்ட ஒருவரிடம் துருப்பு ராஜாவும், ராணியும் இருக்குமானால் அதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ? [விடை: $\frac{1}{17}$]

7. ஒரு பையில் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும், 6 சிவப்புப்பந்துகளும் உள்ளன. அப்பையிலிருந்து 2 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 சிவப்புப் பந்துகளும் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் கண்டுபிடி. [விடை: $\frac{10}{21}$]

8. 6 கறுப்புப் பந்துகளும், 4 சிவப்புப் பந்துகளும், 5 வெள்ளைப் பந்துகளும் ஒரு பையில் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அப்பந்து (i) கறுப்பாக, (ii) சிவப்பாக; (iii) கறுப்பு அல்லது சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடி.

[விடை: (i) $\frac{2}{5}$, (ii) $\frac{4}{15}$; (iii) $\frac{2}{3}$]

9. 5 சிவப்புப் பந்துகளும், 8 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து முதலில் 3 சிவப்புப் பந்துகளும், பிறகு 3

பச்சைப் பந்துகளும் எடுக்கப்படுகின்றன. முதலில் எடுக்கும் 3 பந்துகளையும் (i) மீண்டும் பையில் வைத்துவிட்டால், (ii) அவற்றை பையில் வைக்காவிட்டால், நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடு.

[விடை: (i) $\frac{140}{20449}$, (ii) $\frac{7}{429}$]

10. ஒரு பையிலுள்ள 5 வெள்ளை, 7 பச்சைப் பந்துகளிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு நிறத்திலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ? [விடை: $\frac{35}{66}$]

11. இரண்டு பைகளுள் ஒன்றில் 3 மஞ்சள் பந்துகளும் 2சிவப்புப் பந்துகளும், மற்றொன்றில் 5 மஞ்சள் பந்துகளும் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. அவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு பையிலிருந்து ஒரு பந்து எறிக்கப்பட்டால், அப்பந்து மஞ்சளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. [விடை: $\frac{49}{80}$]

12. ஒரு பையில் 4 வெள்ளைப்பந்துதளும், 2 சிவப்புப் பந்துகளும், இரண்டாவது பையில் 3 வெள்ளைப்பந்துகளும், 5 சிவப்புப் பந்துகளும் இருக்கின்றன. ஒவ்வொரு பையிலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டால், (i) அவை இரண்டும் வெள்ளையாகவோ அல்லது சிவப்பாகவோ இருப்பதற்கான, (ii) ஒன்று வெள்ளையாகவும், ஒன்றுசிவப்பாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி. [விடை: (i) $\frac{11}{24}$, (ii) $\frac{13}{24}$]

13. சீரான நாணயம் ஒன்றை மூன்று முறை சுண்டினால், குறைந்தது ஒரு பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

[விடை: $\frac{7}{8}$]

14. ஒரு விளையாட்டுப் போட்டியில் *B*-க்கு எதிராக *A* வெற்றியடைவதற்குரிய வாய்ப்பு விகிதம் $\frac{3}{2}$ என்றால், மூன்று ஆட்டங்களில், (i) குறைந்தது இரண்டில் *A* வெற்றியடைவதற்கான

நிகழ்தகவினையும், (ii) முதல் இரண்டிலும் A வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவினையும் கண்டுபிடி.

[விடை: (i) $\frac{81}{125}$, (ii) $\frac{21}{25}$]

15. முதல் ஒன்பது இயற்கை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட 9 சீட்டுகள் ஒரு பெட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அப்பெட்டியிலிருந்து ஒவ்வொன்றாக மூன்று சீட்டுகள் எடுக்கப்பட்டால், அவை ஒற்றை எண் அல்லது இரட்டை எண் குறிக்கப்பட்ட சீட்டுகளாக மாறி, மாறி அடுத்தடுத்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடு.

[விடை: $\frac{5}{18}$]

16. ஒரு பகடையை 5 முறைகள் உருட்டும்போது, ஒன்று என்ற இலக்கம் (ii) சரியாக மூன்று தடவைகள் கிடைப்பதற்கான, (ii) குறைந்தது மூன்று தடவைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

[விடை: (i) $\frac{250}{6^5}$; (ii) $\frac{46}{6^4}$]

17. ஒரு வகுப்பிலுள்ள இரண்டு மாணவர்களுள், ஒரு கணக்கின் தீர்வைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான A-ன் பாதக வாய்ப்பு விகிதம் $\frac{4}{3}$ என்றும் B-ன் சாதக வாய்ப்பு விகிதம் $\frac{7}{5}$ என்றும் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால், இருவருமே அக்கணக்கின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

[விடை: $\frac{16}{21}$]

18. ஒரு கணிதப் புத்தகத்தை மூன்று நிபுணர்கள் பரிசீலனை செய்கிறார்கள். அவர்கள் அப்புத்தகத்தைப் பற்றி சாதகமான கருத்துத் தெரிவிப்பதற்கான வாய்ப்பு விகிதங்கள் $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், குறைந்தது இருவராவது சாதகமான கருத்துத் தெரிவிப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

[விடை: $\frac{209}{343}$]

19. ஒரு பகடையை எத்தனை முறை உருட்டினால் குறைந்தது ஒருமுறையாகிலும் "ஒன்று" என்ற இலக்கம் கிடைப்பதற்கு சம வாய்ப்பு இருக்கும் ?

[விடை: 4]

20 25 ஆண்டுகள் வரை ஒரு மனிதன் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$ என்றும், அவனது மனைவி 25 ஆண்டுகள் வரை வாழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், (i) இருவருமே வாழ்வதற்கான, (ii) குறைந்தது ஒருவர் வாழ்தவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடு. [விடை : $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{13}{15}$]

21. ஆண்களும், பெண்களும் சம எண்ணிக்கையுள்ள ஒரு நகரத்தில் 100 ஆண்களுள் 5 பேரும், 10000 பெண்களுள் 25 பேரும் குருடர்களாக உள்ளனர். அக்குருடர்களுள் யாரேனும் ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுத்தால் அவர் ஆணாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க. [விடை: $\frac{20}{21}$]

22. மூன்று பைகளில் உள்ள பலவகை பந்துகளின் விவரம் வருமாறு.

பைகளின்	பந்துகளின் எண்ணிக்கை		
வரிசை எண்கள்	வெள்ளை	சிவப்பு	கருப்பு
முதலாவது பை	1	3	2
இரண்டாவது பை	2	1	1
மூன்ருவது பை	4	3	5

அப்பைகளுள் ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டன. அவற்றுள் ஒன்று வெள்ளையாகவும், மற்றொன்று சிவப்பாகவும் இருந்தன. அவை இரண்டும் இரண்டாவது பையிலிருந்து கிடைத்தன என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

[விடை: $\frac{55}{235}$]

23. ஒரு பையில் ஐந்து பந்துகள் உள்ளன. அவற்றுள் எத்தனை வெள்ளைப் பந்துகள் என்று தெரியாது. ஆனால் பையி

லிருந்து இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன; அவை இரண்டுமே வெள்ளையாக இருக்கின்றன. எல்லாப் பந்துகளுமே வெள்ளையாய் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? [விடை: $\frac{1}{2}$]

24. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலுள்ள 52 சீட்டுகளில் ஒன்று காணாமற் போய் விட்டது. மீதி இருக்கும் சீட்டுகளிலிருந்து இரண்டு எடுக்கப்படுகின்றன. அவை இரண்டு டைமண்டாக இருப்பின் காணாமற்போன சீட்டும் டைமண்டாகத்தான் இருந்திருக்க வேண்டும் என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன என்பதைக் கண்டுபிடி. [விடை: $\frac{11}{50}$]

25; கண்ணாடிக் குழாய்கள் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலை ஒன்றில், x, y, z என்ற மூன்று இயந்திரங்கள் மூலம் மொத்த உற்பத்தியில் முறையே 25%, 35%, 40%, குழாய்கள் தயாரிக்கப் படுகின்றன. அவற்றுள் முறையே 5%, 4%, 2% குழாய்கள் குறையுடையனவாய் இருக்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட குழாய்களில் ஒன்று எடுக்கப்படுகின்றது. அது குறையுடையதாயுள்ளது. அது y-எனும் இயந்திரத்தில் தயாரிக்கப்பட்டதாயிருப் பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? [விடை: $\frac{28}{69}$]

26. ஒரு பையில் 5 பந்துகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் 0, 1, 2, 3, 4, அல்லது 5 பந்துகளுமே வெள்ளையாக இருக்க சம வாய்ப்புகள் உண்டு அப்பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் ஒரு பந்து வெள்ளையாக இருந்தால், அது ஒன்றுதான் அப்பையிலுள்ள வெள்ளைப் பந்தாக இருக்கும் என்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபடி. [விடை: $\frac{1}{15}$]

27. வென் வரைபடத்தின் மூலம், வழக்கமான குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ என்று நிறுவுக.

28. ஒரு சார்பற்ற சீரான நாணயத்தை இரண்டு முறை சுண்டினால் கிடைக்கப்பெறும் முடிவுகளைக் குறிக்க ஒரு கூறுசூழ் வெளியை அமைக்கவும். அதிலிருந்து குறைந்தது ஒருதலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி. [விடை: $\frac{4}{3}$]

29. சமமான இரண்டு பகடைகளை ஒரு முறை உருட்டும் போது கிடைக்கப்பெறும் முடிவுகளைக்குறிக்க ஒருகூறு வெளியைத் தயாரிக்கவும். அதைப் பயன்படுத்தி, இரண்டு பகடைகளிலிருந்து கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை 7 அல்லது 11-ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடவும். [விடை: $\frac{2}{9}$]

30. ஒரு கல்லூரியில் பயிலும் 500 பட்டப் படிப்பு மாணவர் களில் வெவ்வேறு சிறப்புப் பாடங்களை எடுத்துள்ளவரின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சிறப்புப் பாடத்தின் பெயர்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
கணிதம்	329
புள்ளியியல்	186
பொருளாதாரம்	295
கணிதமும், புள்ளியியலும்	83
கணிதமும், பொருளாதாரமும்	217
புள்ளியியலும், பொருளாதாரமும்	63

வென் வரை படத்தின் மூலம், பின் வருவனவற்றைக் கண்டுபிடி.

(i) எத்தனை மாணவர்கள் மூன்று படங்களையும் பயிலு கின்றனர்?

(ii) எத்தனை பேர் கணிதம் எடுத்து பொருளாதாரம் எடுக்காதவர்கள்?

(iii) எத்தனை பேர் கணிதம் அல்லது பொருளாதாரம் எடுத்து புள்ளியியல் எடுக்காதவர்கள்? [விடை: (i) 53, (ii) 112, (iii) 314

2. கணித இயல் எதிர் நோக்கல் (தனித்தனி சரி சமவாய்ப்பு மாறி)

(Mathematical Expectation—Discrete Random Variate)

2·1 நிகழ்தகவுப் பரவலும், குவிவுப் பரவலும்

இங்கு ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுடைய, விரிவான n வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இந் நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகளை முறையே $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ என்க. இந்த n நிகழ்தகவுகளுக்கும் ஒப்ப, X என்ற ஒரு மாறி $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்ற வெவ்வேறு மதிப்புகளை முறையாக ஏற்கும் எனக் கொள்வோம். பின், $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ என்ற நிகழ்தகவுகளும், அவற்றிற்கு ஒப்ப அமைந்துள்ள $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்ற X-ன் n மதிப்புகளின் தொகுதியும் சேர்ந்து "ஒற்றை மாறி நிகழ்தகவுப் பரவலை" (univariate Probability Distribution) உருவாக்குவதாகக் கூறுகிறோம்.

இங்கு X-ன் மதிப்புகள் தனித்தனியானவையாக (அல்லது தொடர்ச்சியற்றவையாக) இருப்பதால், இப்பரவலை "தனித்தனி (அல்லது தொடர்ச்சியற்ற) நிகழ்தகவுப் பரவல்" (Discrete Probability Distribution) என்றும் கூறுவது உண்டு. இத்தகைய பரவல், அலைவெண் பரவலைப் போன்ற தன்மைகளை உடையதாயிருக்கும். ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை ஒன்று என்றிருத்தல் அவசியம். அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$ என்பது குறிப்பிடத் தக்க ஒரு பண்பாகும்.

மேலும் $P(X)$ என்ற சார்பின் மதிப்பு $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ என்றமைவதற்கு ஏற்ப, $X = x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்றிருப்பின்,

$P(X)$ என்பது " நிகழ்தகவுச் சார்பு " என்று அழைக்கப்படும். இங்கு X-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகள், நிகழ்தகவைப் (அல்லது வாய்ப்பைப்) பொறுத்து அமைவதால், X-ஐ " வாய்ப்பு மாறி " (chance Variate) என்று கூறுவர். இதையே " சரிசம வாய்ப்பு மாறி " (Random Variate) என்றும், ஸ்டொக் காஸ்டிக் மாறி (Stochastic Variate) என்றும் கூறுவதுண்டு. பொதுவாக, கூறு வெளியின் மீது வரையறுக்கப்படும் மெய் மதிப்புச் சார்பை " சரிசம வாய்ப்பு மாறி " என்று கூறுவது வழக்கம்.

அடுத்து, குவிவுப் பரவல் சார்பினை வரையறுப்போம். x-என்பது ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட மெய்யெண்ணாக இருக்கட்டும். பின் x-க்குச் சமமான அல்லது x-ஐ விட குறைவான மதிப்புகளை X-எனும் சரிசம வாய்ப்பு மாறி அடைவதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பை $F(x)$ என்று குறிப்பிடுவோமானால், $F(x)$-ஐ " குவிவுப் பரவல் சார்பு " (Cumulative Distribution Function) அல்லது சுருக்கமாக " பரவல் சார்பு " என்று அழைப்பர். அதாவது, $F(x) = P(X \leq x)$ என்றிருப்பின், $F(x)$ ஒரு பரவல் சார்பு எனப்படும்.

மேலும் X, Y எனும் இரண்டு மாறிகள் முழுதும் ஒத்த பரவல்களை உடையவைகளாயிருக்க வேண்டுமாயின், அவற்றின் நிகழ்தகவுச் சார்புகள் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே அவற்றின் பரவல் சார்புகளும் முழுதும் ஒத்தனவாக இருக்க வேண்டும்.

2·11 பரவல் சார்பின் பண்புகள் $a < b$ என்றமையுமாறு a, b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும். (a, b) எனும் இடைவெளியில் அமையும் X எனும் சரிசம வாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பு $F(x)$-ன் பண்புகளாவன.

(*i*) $F(x)$ என்பது படிச்சார்பாக இருக்கும் (Step Function)

(*ii*) $x < a$ எனில், $F(x) = 0$ என்றும்

$x \geq b$ எனில், $F(x) = 1$ என்றும் இருக்கும்.

(*iii*) $x \geq y$ எனில், $F(x) \geq F(y)$ என்றிருக்கும்.

அதாவது $F(x)$ என்பது குறையுஞ் சார்பல்ல. (Non-decreasing)

2·2 எதிர் நோக்கல்

X என்பது ஏதேனும் ஒரு வாய்ப்பு மாறியாக இருக்கட்டும். பின் $Y = \phi(X)$ எனில், Y-ம் ஒரு வாய்ப்பு மாறியாக இருத்தல் வேண்டும். மேலும் $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் நிகழ்தகவுகளாக இருக்கட்டும்

இங்கு, $\sum_{i=1}^{n} [\phi(x_i) \cdot p_i]$ என்ற கூட்டுத் தொகையை, $\phi(X)$ என்ற சார்பின் "எதிர் நோக்கல்", அல்லது "எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு" என்று கூறுவர் இதை, $E[\phi(X)]$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவார்கள்.

ஆகையால் $\phi(X)$-ன் எதிர்நோக்கல்,

$$E[\phi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \cdot p_i \text{ என்பதாம்.}$$

குறிப்பாக, $\phi(X) = X$ என்றிருப்பின், X-ன் எதிர் நோக்கல்,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \text{ என்று தெரிகிறது.}$$

இம்மதிப்பை X-ன் "சராசரி" என்றும் கூறுவர். இதை $\bar{X}$ அல்லது μ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

2·2-1 தேற்றம் 1. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் சரிசம வாய்ப்பு மாறியை X என்க. மேலும் a, b என்பன ஏதேனும் இரண்டு கொடுக்கப் பட்ட மாறிலிகளாயின்,

$$E(ax + b) = a \cdot E(x) + b$$

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் நிகழ்தகவுகளை $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ என்க.

$$\therefore \quad E(ax + b) = \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b) p_i$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i + b \sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$= a \cdot E(X) + b \cdot 1 \left[\therefore \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right]$$

ie., $\underline{E(aX + b) = a\,E(X) + b}$.

குறிப்பு: (*i*) $a = 1$ எனில், $E(X + b) = E(X) + b$

(*ii*) $a = 0$ எனில், $E(b) = b$.

அதாவது ஒரு மாறிலியின் எதிர் நோக்கல் அம்மாறிலியின் மதிப்புதான் என்று தெரிகிறது,

(*iii*) $b = 0$ எனில், $E(aX) = a \cdot E(X)$

(*iv*) $a = 1, b = -\bar{X}$ என்றால், $E(X - \bar{X})$

$$= E(X) - \bar{X} = 0$$

ie., $E[X - E(X)] = 0$

ஆகையால், ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலில், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து வாய்ப்பு மாறி உள்ள விலக்கத்தின் எதிர் நோக்கும் மதிப்பு பூச்சியம் எனத் தெரிகிறது.

2.2-2 தேற்றம் 2. இரண்டு சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையின் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு, அம்மாறிகளின் தனித்தனி எதிர் பார்க்கும் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

நிரூபணம்

X, Y என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளாக இருக்கட்டும். $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_m$ என்ற நிகழ்தகவுகளுக்கு ஏற்ப, X எனும் மாறியின் வெவ்வேறு மதிப்புகளை $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$ என்க. இதேபோன்று $p_1', p_2', p_3' \ldots\ldots p_n'$ என்ற நிகழ்தகவுகளுக்கு ஒப்பான Y-ன் மதிப்புகளை $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_n$ என்க.

இப்பொழுது $Z = X + Y$ என்றால், $(x_i + y_j)$, $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots m;\ j = 1, 2, 3, \ldots\ldots n)$ என்ற $m \cdot n$ மதிப்புகளை Z

என்ற மாறி அடையும் எனத் தெரியும். ஏனெனில் X ஏற்கும் ஒவ்வொரு மதிப்புகளுக்கும் தகுந்தாற்போல், Y-க்கு n மதிப்புகள் உள்ளன. ஆனால் X-க்கு m வெவ்வேறு மதிப்புகள் உண்டு. ஆகையால் X-ன் எல்லா m மதிப்புகளையும், Y-ன் n மதிப்பு களுடன் ஒன்று சேர்க்க Z-க்கு mn மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

X, Y என்ற மாறிகள் முறையே x_i, y_j என்ற மதிப்புகளை ஒரே சமயத்தில் அடைவதற்கான நிகழ்தகவை p_{ij} என்று குறிப்பிடுவோம்.

அடுத்து X எனும் மாறி x_i என்ற குறிப்பிட்ட மதிப்பை ஏற்கும் போது, y_1, y_2, ... y_n என்ற n மதிப்புகளுள் ஏதேனும் ஒன்றை Y அடையுமாதலால், $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ என்ற கூட்டுத் தொகை, இந்த n மதிப்புகளுள் ஏதேனும் ஒன்றை Y அடையும் அதே நேரத்தில், X-ன் மதிப்பு x_i என்றமைவதற்கான நிகழ் தகவைக் குறிக்கும்.

ஆகையால், $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i$ என்று தெரிகிறது.

இதே போன்று, $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p_j'$ என்றும் அறியலாம்.

இப்பொழுது,

$$E(Z) = E(X+Y)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \right) x_i + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij} \right) y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^{n} p_j' \cdot y_j$$

i.e., $E(Z) = E(X) + E(Y)$

குறிப்பு : (i) இத்தேற்றத்தை பல மாறிகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும் விரித்துக் கூறமுடியும். எனவே,

$$E(X + Y + Z + \ldots) = E(X) + E(Y) + E(Z) + \ldots\ldots$$

(ii) இரண்டு சரிசமவாய்ப்பு மாறிகளும் ஒன்று ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு, மற்றொருமாறி அடையும் மதிப்பினைச் சார்ந்திராவிடில், அவ்விரு மாறிகளும் "புள்ளியியல் முறைப்படி சார்பிலாதன" என்று வழங்கப்படும்.

2.2.3 தேற்றம் 3 இரண்டு சார்பிலா மாறிகளின் பெருக்குத் தொகையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, அவ்விரு மாறிகளின் தனித்தனி எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம்.

நிரூபணம்

X, Y என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சார்பிலா மாறிகள் என்க. x_i என்ற மதிப்பை X அடைவதற்கான நிகழ்தகவை p_i என்றும், y_j என்ற மதிப்பை Y அடைவதற்கான நிகழ்தகவை p_j' என்றும் எடுத்துக்கொள்வோம். மேலும் X-க்கு m வெவ்வேறு மதிப்புகளும், Y-க்கு n வெவ்வறு மதிப்புகளும் உண்டு என்க.

$Z = XY$ என்றால், X, Y ஏற்கும் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப, Z-க்கு $(x_i \cdot y_j)$ என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கும் mn மதிப்புகள் இருக்கும் எனத்தெரிகிறது.

X, Y சார்பிலா மாறிகளாயிருப்பதால், நிகழ்தகவு சேர்க்கை தேற்றப்படி, X, Y என்பன ஒரேசமயத்தில் முறையே x_i, y_j என்ற மதிப்புகளை அடைவதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பு $(p_i \cdot p_j')$ என்று கிடைக்கும். அதாவது $(x_i \cdot y_j)$ என்ற குறிப்பிட்ட மதிப்பை (XY) எனும் பெருக்குத் தொகை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு $(p_i \cdot p_j')$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad E(Z) = E(XY)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i \cdot y_j)(p_i \cdot p_j')$$

$$i.e,\ E(Z) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, p_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot p_j'$$

($\because$ X, Y சார்பிலா மாறிகள்)

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p_i \cdot E(Y)$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

எனவே, $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

குறிப்பு: (i) பல சார்பிலா மாறிகளின் பெருக்குத் தொகைக்கும் இத்தேற்றத்தை விரித்துக் கூறமுடியும். ஆகையால்,

$$E(XYZ \ldots\ldots) = E(X) \cdot E(Y) \cdot E(Z) \ldots\ldots$$

(ii) K என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாக இருப்பின்,

$E(KX) = K \cdot E(X)$ என்றாகும்.

2.3 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

(அ) ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலின் வாய்ப்பு மாறி X என்க. அப்பரவலுக்கான நிகழ்தகவுகளை $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ என்க. மேலும் r என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண்ணாயின், $E(X^r)$ எனும் X^r-ன் எதிர்நோக்கும் மதிப்பை, கொடுக்கப்பட்ட பரவலின், பூச்சியத்தை மையமாகக் கொண்ட r படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என வரையறுக்கின்றனர். இதை μ_r' என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

எனவே, $\mu_r' = E(X^r)$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^r \cdot p_i$$

குறிப்பாக, $r = 1$ எனில்,

$\mu_1' = E(X) = \bar{X}$ என்று தெரிகிறது.

அதாவது μ_1' என்பது X-ன் சராசரியே என்று அறிகிறோம். அடுத்து, $r = 2$ எனில்,

$\mu_2' = E(X^2)$ என்றாகும்.

இது, பரவலின், பூச்சியத்தை மையமாகக் கொண்ட, இருபடி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்றழைக்கப்படும்.

இதேபோன்று வெவ்வேறு படிகளை உடைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் கணக்கிடலாம்.

(ஆ) $E[(X - \bar{X})^r]$ என்ற எதிர் நோக்கல், கூட்டுச் சராசரி $\bar{X}$-ஐ மையமாகக் கொண்ட, X-பரவலின் r படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்று கூறப்படும். இதை μ_r என்று குறிப்பிடுவர்.

குறிப்பாக $r = 2$எனில், $E(X - \bar{X})^2]$ எனும் எதிர்நோக்கலை X-பரவலின் "மாறுபாடு" அல்லது "பரவற்படி" (Variance) என்று கூறுவர்.

இதை Var (X) என்றும் குறிப்பிடலாம்.

$$\therefore \text{ Var } (X) = E((X - \bar{X})^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2 \cdot p_i$$

மேலும் $\mu_2 = E[X^2 - 2X(\bar{X}) + \bar{X}^2]$

$$= E(X^2) - 2\bar{X}\, E(X) + \bar{X}^2$$

$$= E(X^2) - 2\bar{X} \cdot \bar{X} + \bar{X}^2$$

$$= E(X^2) - \bar{X}^2$$

i.e., $\text{Var}(X) = E[X^2] - [E(X)]^2$

இச்சூத்திரம் மாறுபாட்டின் மதிப்பைக் கணக்கிட மிகவும் பயன்படுகிறது.

Var (X)-ஐ σ^2 என்று குறிப்பிடுவோமானால், σ எனும் மதிப்பை, X-பரவலின் "திட்ட விலக்கம்" என்று கூறுவர்.

அதாவது மாறுபாட்டின் வர்க்க மூலத்தின் மிகை மதிப்பை கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் "திட்ட விலக்கம்" என்பர்.

2·3·1 தேற்றம் 1. a, b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மாறிலிகளாக இருக்கட்டும். X என்பது ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலின் வாய்ப்பு மாறி எனில்,

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{ Var}(X)$$

நிருபணம்

$$Y = aX + b \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad E(Y) = a\,E(X) + b \text{ என்று தெரியும்.}$$

இப்பொழுது, $\text{Var}\,(Y) = E[Y - E(Y)]^2$

$$= E[(aX + b) - \{a\,E(X) + b\}]^2$$

$$= E[aX - a\,E(X)]^2$$

$$= a^2 \cdot E[X - E(X)]^2$$

$$\text{i.e., } \text{Var}\,(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}\,(X)$$

குறிப்பு: (i) $a = 1$ எனில், $\text{Var}\,(X + b) = \text{Var}\,(X)$

(ii) $b = 1$ எனில், $\text{Var}\,(aX) = a^2\,\text{Var}(X)$

(iii) X – பரவலின் திட்ட விலக்கம் σ_x எனில், $\sigma_{(ax+b)} = |a|\,\sigma_x$ என்றிருக்கும்.

2·3·2. தேற்றம் 2. X எனும் சரிசமவாய்ப்பு மாறிக்கு $E(X^2)$-ன் மதிப்பு உளதாயிருக்குமானுல், $E(X)$, $\text{Var}(X)$ ஆகிய மதிப்புகளும் இருக்கவேண்டும்.

நிருபணம்

X என்ற மாறியின் வெவ்வேறு மதிப்புகளாகிய $x_i\,(i = 1, 2, \ldots n)$-க்கு ஏற்ப, X-பரவலுக்கான நிகழ்தகவுகளின் மதிப்பை p_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனக்கொள்வோம். ஆகையால், எதிர் நோக்கலின் வரையறைப்படி

$$E[\,|X|\,] = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_j|\,\sqrt{p_i}\cdot\sqrt{p_i}$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i \sum_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{2}}$$

(காஷியின் சமனின்மைப்படி)

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i\right]^{\frac{1}{2}} \left[\because \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right]$$

i.e., $E[|X|] \leq [E(X^2)]^{\frac{1}{2}}$

எனவே $E(X^2)$-ன் மதிப்பு உளதாயிருக்குமானுல்; $E(X)$-ம் இருக்கும் எனத் தெரிகிறது.

மேலும், $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ என்றமைவதால் $Var(X)$-ன் மதிப்பும் இருக்குமென அறிகிரேும்.

2·4 உடன் மாறுபாடு (Co-Variance)

X, Y என்ற இரண்டு சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளின் எதிர் நோக்கல்கள் (கூட்டுச் சராசரிகள்) முறையே $\bar{X}$, $\bar{Y}$ என்ருல், $[X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]$ என்ற மாறியின் எதிர் நோக்கலே X, Y-க்கு கிடையேயான "உடன்மாறுபாடு" என்ற வரையறுக்கிரேும். இதை core (X, Y) என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

$$\begin{aligned} \therefore \quad \text{core}\ (X, Y) &= E[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})] \\ &= E[XY - \bar{X}Y - X\bar{Y} - \bar{X}\bar{Y}] \\ &= E(XY) - \bar{X}\,E(Y) - \bar{Y}\,E(X) + Y\bar{X} \\ &= E(XY) + \bar{X}\bar{Y} - \bar{X}\bar{Y} - \bar{X}\bar{Y} \\ &= E(XY) - \bar{X}\bar{Y} \end{aligned}$$

i.e., core $(XY) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

2·4-1 தேற்றம் 1. a, b என்பன இரண்டு மாறிலிகளாயின், பின்

(i) core $(X + a, Y + b =$ core (X, Y)

(ii) core $(aX, bY) = ab$ core (X, Y)

நிருபணம்

(i) core $[(X+a),(Y+b)] = E[(X + a)(Y + b)] - E(X + a)\,E(Y + b)$

$= [E(XY) + aE(Y)$

$$+ b\,E(X) + ab] - [E(X)\,E(Y) + aE(Y) + b\,E(X) + ab]$$
$$= E(XY) - E(X)\,E(Y)$$
$$= \text{core}\,(X, Y)$$

(i) $\text{core}\,(aX, bY) = E[aX, bY] - E(aX) \cdot E(bY)$
$$= ab\,E(XY) - a\,E(X)\,b\,E(Y)$$
$$= ab\,[E(XY) - E(X)\,E(Y)]$$
$$= ab\,\text{core}\,(X, Y)$$

துணை முடிவுகள்

(i) $\text{core}\,(X, X) = \text{Var}\,(X)$

ஏனெனில், $\text{core}\,(X, X) = E(X \cdot X) - E(X) \cdot E(X)$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= \text{Var}\,(X).$$

(ii) X, Y என்பன இரண்டு சார்பிலா மாறிகளாயின், $\text{core}\,(X, Y) = 0$.

ஏனெனில், X, Y சார்பிலா மாறிகளாக இருப்பதால்,
$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

எனவே, $\text{core}\,(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$ என்றாகும்.

ஆனால், இதன் மறுதலை எப்பொழுதுமே உண்மையாக இருக்க வேண்டும் என்பதற்கில்லை. பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

$X = 1, 2, 3, -1, -2, -3$ என்றும், இம்மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் X ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

மேலும் X, Y என்ற மாறிகளுக்கிடையே, $Y = 4X^2$ என்ற தொடர்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

ஆகையால், $E(X) = \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(2) + \frac{1}{6}(3) + \frac{1}{6}(-1)$
$$+ \frac{1}{6}(-2) + \frac{1}{6}(-3)$$
$$= 0$$

மேலும், $E(XY) = E(X \cdot 4X^2) = E(4X^3)$

$$= 4\,E(X^3)$$

$$= 4\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(8) + \frac{1}{6}(27) + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{6}(-8) + \frac{1}{6}(27)\right]$$

$$= 4/6\ (0)$$

$$= 0$$

எனவே core $(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$= 0$ என்றாகும்.

ஆனால் $Y = 4X^2$ என எடுத்துக் கொண்டிருப்பதால், அவை சார்புடைய மாறிகள் என்று விளங்கும்.

இவ்வாறு, X, Y என்ற மாறிகளுக்கிடையே உடன் மாறுபாடு பூஜ்யமாக இருந்தால், அவை சாரபிலா மாறிகளாக இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமில்லை என்று அறிகிறோம்.

2.4-2 தேற்றம் 2. இரண்டு சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் மாறுபாடு அம்மாறிகளின் தனித்தனி மாறுபாடுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.

நிரூபணம்

X, Y என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சார்பிலா மாறிகள் எனவும், $Z = X + Y$ எனவும் கொள்வோம். பின்;

$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ என்று தெரியும். இப்பொழுது,

$$[Z - E(Z)]^2 = [(X + Y) - \{E(X) + E(Y)\}]^2$$

$$= [\{X - E(X)\} + \{Y - E(Y)\}]^2$$

$$= [X - E(X)]^2 + [Y - E(Y)]^2 + 2[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]$$

$$\therefore\ E[Z - E(Z)]^2 = E[X - E(X)]^2 + E[Y - (Y)]^2 + 2E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]$$

$$i.e., \text{Var}(Z) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\,\text{Core}(X, Y)$$

ஆனால் X, Y சார்பிலாதனவாகையால், Core $(X, Y) = 0$ என்று தெரியும்.

எனவே, $\text{Var}(Z) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ என்றாகும்.

$$i.e., \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

குறிப்பு (i) இதேபோன்று, X, Y சார்பிலா மாறிகள் எனில், $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ என்றும் நிறுவலாம்.

(ii) மேலே கூறிய தேற்றத்தை, பல மாறிகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும் விரித்துக் கூறலாம் என்பதை பின்வரும் தேற்றத்தின் மூலம் அறியலாம்.

2.4-3 தேற்றம் 3. $X_1\ X_2, X_3 \dots X_n$ என்பன ஏதேனும் n சரிசம வாய்ப்பு மாறிகள் எனக. $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட n மாறிலிகள் என்றால்,

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i,j} \text{Core}(X_i, X_j)\ (i \neq j)$$

நிரூபணம்

$$\text{Var}[a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_n X_n]$$
$$= E[(a_1 X_1 + a_2 X_1 + \dots + a_n X_n) - E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n)]^2$$
$$= E[\{a_1 X_1 - E(a_1 X_1)\} + \{a_2 X_2 - E(a_2 X_2)\} + \dots + \{a_n X_n - E\, a_n X_n)]^2$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{n} [a_i X_j - E(a_i X_i)]^2\right.$$

$$\left. + 2\sum_{i,j} [a_i X_i - E(a_i X_i)][a_j X_j - E(a_j X_j)]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, E\,[X_i - E\,(X_i)]$$

$$+ 2 \sum_{i,\,j} a_j \, a_j \, E\,\{[X_i - E\,(X_i)] \cdot [X_j - E\,(X_j)]\}$$

$$i.e., \ Var[\Sigma_i \, a_i \, X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, Var\,(X_i) + 2 \sum_{i,\,j} a_i \, a_j \ Core\,(X_i, X_j); \ (i \neq j)$$

துணை முடிவுகள்

(i) $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பன சார்பிலா மாறிகளாயின், Core $(X_i \, X_j) = 0; (i \neq j)$

$$\therefore \ Var\,(a_1 \, X_1 + a_2 \, X_2 + \cdots + a_n \, X_n = \sum_{i=j} a_i^2 \, Var\,(X_i)$$

(ii) மேலும், $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ என்றும், X_1 $X_2 \ldots X_n$ என்ற மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் மாறுபாட்டையும் σ^2 என்றும் எடுத்துக்கொள்வோமானால்,

$$Var\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \, Var\,(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n \, \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}.$$

அதாவது, $Var\,(\bar{X}) = \frac{1}{n} \, Var\,(X)$

இவ்வாறு, X என்ற மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பினுல் குறிப்பிடப்படும் ஓர் இனத்தொகுதியின் கூறு எடுத்தல் முறையில், கூறுகளின் சராசரியின் மாறுபாடு, X-ன் மாறுபாட்டை கூறுகளின் அளவால் வகுக்கக் கிடைக்கும் மதிப்புக்குச் சமம் என்று நிறுவியுள்ளோம்.

இம்முடிவு கூறு எடுத்தல் கொள்கையில் மிகவும் பயன்படக்கூடிய ஒன்ருகும்.

2 5 நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர்நோக்கல்

Y என்ற நிகழ்ச்சி நடந்தபின், X எனும் சரிசமவாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் x_i என்ற மதிப்பிற்கு ஒப்ப, $p_i(Y)$ என்ற நிகழ்தகவு இருப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது,

$$p_i(Y) = P(X = x_i/Y); \quad i = 1, 2, \ldots\ldots m$$

$$= \frac{P[(X = x_i) \cdot Y]}{P(Y)}; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots m$$

பின் Y கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர் நோக்கல்,

$$E(X/Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, p_i(Y) \text{ என்று வரையறுக்கப்படும்.}$$

$$\text{அதாவது, } E(X/Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \left[\frac{P(x_i \cdot Y)}{P(Y)}\right]$$

இதே போன்று, நிபந்தனைக்குட்பட்ட மாறுபாடு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\text{var}(X/Y) = E[\{X - E(X/Y)\}^2/Y]$$

2.5-1 தேற்றம் 1. X-ன் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு, Y கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர் நோக்கலின் எதிர்நோக்கலுக்குச் சமமாக இருக்கும்.

அதாவது, $E(X) = E[E(X/Y)$ என்பது உண்மையாகும்.

நிரூபணம்

$$E[E(X/Y)] = \sum_{j=1}^{n} E(X/y_j) = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p_i(y_j)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot p_i(y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \left[\frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{p_j}\right]$$

அதாவது, $E[E(X/Y)] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

$$= E(X)$$

இதே போன்று, $E[E(Y/X)] = E(Y)$ என்றும் நிறுவ முடியும்.

2.5-2 தேற்றம் 2. X எனும் மாறியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பு, Y என்ற நிகழ்ச்சி நடந்தபின் X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட மாறுபாட்டின் எதிர் நோக்கல். X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர் நோக்கலின் மாறுபாடு ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

அதாவது, $\text{var}(X) = E[\text{var}(X/Y)] + \text{var}[E(X/Y)]$

நிரூபணம்

இப்பொழுது, $\text{var}(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X - E(X/Y) + E(X/Y) - E(X)]^2$

$$= E[X - E(X/Y)]^2 + E[E(X/Y) - E(X)]^2$$

$$+ 2 \cdot E\{[X - E(X/Y)] \cdot [E(X/Y) - E(X)]\}$$

ஆனால் $E[X \cdot E(X/Y)] = E[E(X/Y) \cdot E(X/Y)]$ ...... (1)

$$E[X \cdot E(X)] = E[E(X/Y) \cdot E(X)] \quad \ldots\ldots (2)$$

ஆகையால்,

$$E\{[X - E(X/Y)] \cdot [E(X/Y) - E(X)]\} = E\{X \cdot E(X/Y) - X \cdot E(X) - E(X/Y) \cdot E(X/Y) + E(X/Y) \cdot E(X)\}$$

$$= [E\{X \cdot E(X/Y)\} - E\{E(X/Y) \cdot E(X/Y)\}] + [E\{E(X/Y) \cdot E(X)\} - E\{X \cdot E(X)\}]$$

$= [0] + [0]$ (முடிவுகள் (2)-லிருந்து)

$= 0$

மேலும், $\text{var}(X/Y) = E\{[X - E(X/Y)]^2/Y\}$

$= E\{U^2/Y\}$ என்க, $[U = X - E(X/Y)]$

பின், $E[\text{var}(X/Y) = E[E\{U^2/Y\}] = E[U^2]$ என்று தெரியும்,

அதாவது, $E[\text{var}(X/Y) = E[X - E(X/Y)]^2$ என்றாகும்.

இதே போன்று,

$$\text{var}[E(X/Y)] = E[E(X/Y) - E\{E(X/Y)\}]^2$$

$= E[E(X/Y) - E(X)]^2$ என்று கிடைக்கும். எனவே முடிவு (1)-லிருந்து,

$$\text{var}(X) = E[\text{var}(X/Y)] + \text{var}[E(X/y)]$$

என்று அறிகிறோம்.

2.6 விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு (Moment Generating Function)

2.6-1 வரையறை $[e^{t(X-a)}]$ என்று சார்பின் எதிர் நோக்கலை, $X = a$ என்ற எண்ணை வையமாகக் கொண்ட, X எனும் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவலின் "விலக்கப்

பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு" என்று வரையத்துள்ளனர். இதை $M_a\ (t)$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். எனவே, $X = x_i$ என்ற மதிப்பை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு p_i எனில்,

$$M_a(t) = E\left[e^{t(X-a)}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[e^{t(x_i-a)} \cdot p_i\right] \text{ என்றாகும்.}$$

இங்கு t-ஐ ஒரு துணை அலகு (மாறி) என்பர். மேலும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு, $M_a(t)$ என்பது t எனும் மெய்யெண்ணின் சார்பு என்று தெரிகிறது. படிக் குறித்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $e^{t(X-a)}$-ன் விரிவை எழுத முடியும்.

அதாவது, $$e^{t(X-a)} = 1 + \frac{t(X-a)}{\angle 1} + \frac{t^2(X-a)^2}{\angle 2} + \ldots\ldots\ldots \to \infty$$

$$\therefore\ M_a(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{t(x_i-a)}\, p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left[1 + \frac{t(x_i-a)}{\angle 1} + \frac{t^2(x_i-a)^2}{\angle 2} + \ldots\ldots \to \infty\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i + \frac{t}{\angle 1} \sum_{i=1}^{n} (x_i-a)\, p_i$$

$$+ \frac{t^2}{\angle 2} \sum_{i=1}^{n} (x_i-a)^2 \cdot p_i + \ldots\ldots + \frac{t^r}{\angle r} \sum_{i=1}^{n} (x_i-a)^r \cdot p_i + \ldots\ldots \to \infty$$

$$= 1 + \frac{t}{\angle 1}\mu'_1 + \frac{t^2}{\angle 2}\mu'_2 + \cdots\cdots + \frac{t^r}{\angle r}\mu'_r + \cdots\cdots \rightarrow \infty$$

இங்கு μ'_r என்பது X-பரவலின் a-ஐ மையமாகக் கொண்ட r-படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்று தெரியும். ஆகையால், t-ன் படி ஏறு வரிசையில் இருக்குமாறு, $M_a(t)$-ஐ விரித்து எழுதுவோமானால், அவ்விரிவிலுள்ள $\frac{t^r}{\angle r}$ -ன் குணகமானது, கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் r-படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்று அறிகிறோம். இவ்வாறு ஒரு பரவலின் வெவ்வேறு படிகளுள்ள விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை எளிதில் கணக்கிட $M_a(t)$ எனும் சார்பின் விரிவு பயன்படுவதால்; அச்சார்பினை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு என்று அழைக்கிறோம்.

2.6-2 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை நடைமுறையில் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

$$M_a(t) = 1 + \frac{t}{\angle 1}\mu'_1 + \frac{t^2}{\angle 2}\mu'_2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{t^r}{\angle r}\mu'_r$$

$+ \ldots\ldots \rightarrow \infty$ இருபுறமும், t-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழு காண,

$$\frac{d}{dt}[M_a(t)] = \mu'_1 + \frac{2t}{\angle 2}\cdot\mu'_2 + \cdots\cdots + \frac{r}{\angle r}\, t^{r-1}\cdot\mu'_r + \cdots\cdots \rightarrow \infty$$

$\therefore$ $t = 0$ என்றிட

$$\left\{\frac{d}{dt}[M_a(t)]\right\}_{t=0} = \mu'_1 \text{ என்றாகும்.}$$

மேலும் $$\left\{\frac{d^2}{dt^2}[M_a(t)]\right\}_{t=0} = \mu'_2 \text{ என்று நிறுவலாம்.}$$

பொதுவாக, r-படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகையின் மதிப்பு

$$\mu'_r = \left\{\frac{d^r}{dt^r}[M_a(t)]\right\}_{t=0}$$ என்று கிடைக்கப் பெறும்.

$$\text{அடுத்து, } M_a(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{t(x_i - a)} \cdot p_i$$

$$= e^{-ta} \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \cdot p_i$$

$$= e^{-ta} \cdot M_0(t)$$

ஆகையால், a என்ற ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பின் மதிப்பு, பூஜ்யத்தை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பினைப் போன்று e^{-at} மடங்கு உள்ளது என்று அறிகிறோம்.

2 6-3 விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பின் பண்பு: இரண்டு சார்பிலா மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பின் மதிப்பு, அவ்விரு மாறிகளின் தனித்தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

நிரூபணம்

X, Y என்பன இரண்டு சார்பிலா மாறிகள் என்க. அவற்றின் கூட்டுத் தொகையின், ஆதியை மையமாகக் கொண்ட, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு,

$$M_0(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right]$$

$$= E\left[e^{tX} \cdot e^{tY}\right]$$

$$= E\left(e^{tX}\right) \cdot E\left(e^{tY}\right) \quad (\because X, Y \text{ சார்பிலா மாறிகள்})$$

= X, Y என்ற மாறிகளின், ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் பிறப்பிக்கும் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகை

2·7 சிறப்பியல்புச் சார்பு (Characteristic Function)

2·7-1 வரையறை: X என்பது ஏதேனும் ஒரு சரிசம வாய்ப்பு மாறி என்றும் $i = \sqrt{-1}$ என்பது கற்பனை எண் என்றும் இருப்பின், (e^{itx})-ன் எதிர் நோக்கலை, X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு என்கிறோம். (இதை X-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பு என்றும், கூறலாம்)

இதை $\phi(t)$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

$$\therefore \quad \phi(t) = E(e^{itx})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [e^{itr_j} \cdot p_j]$$

2·7-2 சிறப்பியல்புச் சார்பின் பண்புகள் (i) $\phi(0) = 1$; $|\phi(t)| \leq 1$.

(ii) $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$ என்றால், $\overline{\phi(t)}$-ஐ $\phi(t)$-ன் துணையியக் கலப்புச் சார்பு என்று கூறுகிறோம்.

(iii) X, Y என்பன இரண்டு சார்பிலா சரிசம வாய்ப்பு மாறிகள் என்றால், அவற்றின் கூட்டுத் தொகையின் சிறப்பியல்புச் சார்பு, அம்மாறிகளின் தனித்தனி சிறப்பியல்களின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

$Z = X + Y$ என்றும், Z-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பை $\phi_z(t)$ என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

ஆகையால், $\phi_z(t) = E[e^{itz}]$

$$= E[e^{it(X+Y)}]$$

$$= E[e^{(itX)} \cdot e^{(itY)}]$$

$$= E[e^{itX}] \cdot E[e^{itY}]$$

i.e., $\phi_{x+y}(t) = \phi_x(t) \cdot \phi_y(t)$

இம் முடிவை பல சார்பிலா மாறிகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும் விரித்துக் கூறலாம்.

(iv) நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்புகளும், அவற்றின் சிறப்பியல்புச் சார்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று ஒத்தியைபு (one-one Correspondence) உடையன.

அதாவது, இரண்டு பரவல் சார்புகள் முழுதும் ஒத்தவையாக இருப்பின் அவற்றின் சிறப்பியல்புச்சார்புகளும் முழுதும் ஒத்தவையாக இருக்கும். இதையே பின்வரும் "தனித்தன்மை தேற்றமாக" கூறுவதுண்டு.

2·7-3 "தனித்தன்மை தேற்றம்" (Uniqueness Theorem): ஏதேனும் சரிசம வாய்ப்பு மாறி ஒன்றின் சிறப்பியல்புச் சார்பு மட்டும் கொடுக்கப்பட்டால், அதன் பரவலை திட்டவட்டமாக நிச்சயிக்க முடியும்

அல்லது, " ஒரே மாதிரியான சிறப்பியல்புச் சார்புகளை உடைய சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளின் பரவல்களும் ஒன்றாகவே இருக்கும் " என்றும் கூறலாம்.

இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மை என நிரூபிக்கலாம். நிரூபணங்களை, "தொடர் நிகழ்தகவுச் சார்பு"களின் பண்புகளை விளக்கும்போது, எளிய முறையில் கொடுக்கலாம். சிறப்பியல்புச் சார்புகளின் வேறு சில பண்புகளையும் அப்பொழுது பார்க்கலாம்.

2·8 குவிவுகள் (Cumulants)

2·8-1 வரையறை : நிகழ்தகவுப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பின் மடக்கையை t-ன் படியில் ஒரு குவி தொடராக விரித்தெழுத முடியுமானால், அத்தொடரில் உள்ள $\frac{t^r}{\angle r}$ -ன் குணகத்தைக் கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் r-ஆவது "குவிவு" என்று கூறுகிறோம்.

$M_a(t)$-ஐ கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் a-ஐ மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு எனக் கொள்வோம். பின்,

$$\log M_a(t) = k_1 t + k_2 \frac{t^2}{\angle 2} + k_3 \frac{t^3}{\angle 3} + \cdots\cdots + k_r \frac{t^r}{\angle r}$$

$+ \cdots\cdots \to \infty$ என்று எழுத முடியுமானால், $k_1, k_2, k_3 \ldots\ldots k_r \ldots$ எனும் குணங்களை அப்பரவலின், முறையே முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, ... r-ஆவது ... குவிவுகள் என்கிறோம்.

t-ன் சார்பாகிய வலது புற குவி தொடரை $k(t)$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். இங்கு $k(t)$, பரவலின் " குவிவுச் சார்பு " எனப்படும்

$$\text{ஆகையால்,}\quad k(t) = k_1 t + k_2 \frac{t^2}{\angle 2} + \ldots + k_r \frac{t^r}{\angle r} + \ldots\ldots \to \infty$$

இதிலிருந்து, $k_r = \left\{ \frac{d^r}{dt^r} \left[k(t) \right] \right\}_{t=0}$ என்று எளிதில் நிறுவலாம். இச்சூத்திரம், குவிவுகள் எளிய முறையில் கணக்கிட மிகவும் பயன்படும்.

2·8-2 குவிவுகளை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் மூலம் கணக்கிடுதல்: கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பை $(M_a)(t)$ என்றும், குவிவுச் சார்பை $k(t)$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore\quad M_a(t) = 1 + \frac{t}{\angle 1}\mu'_1 + \frac{t^2}{\angle 2}\mu'_2 + \frac{t^3}{\angle 3}\mu'_3 + \ldots \to \infty$$

$$k(t) = \log M_a(t)$$

$$= \log\left[1 + \frac{t}{\angle 1}\mu'_1 + \frac{t^2}{\angle 2}\mu'_2 + \frac{t^3}{\angle 3}\mu'_3 + \ldots\ldots \to \infty \right]$$

$$= \left[\left(\frac{t}{\angle 1}\mu'_1 + \frac{t^2}{\angle 2}\mu'_2 + \ldots\ldots \right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\angle 1}\mu'_1 + \frac{t^2}{\angle 2}\mu'_2 + \ldots\ldots \right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{\angle 1}\mu'_1 + \frac{t^2}{\angle 2}\mu'_2 + \ldots\ldots \right)^3 \ldots\ldots \to \infty \right]$$

(மடக்கைத் தேற்றப்படி)

ஆனால் $k(t) = k_1 t + k_2 \frac{t^2}{\angle 2} + k_3 \frac{t^3}{\angle 3} + \ldots\ldots \to \infty$ என்று தெரியும். இவ்விரு தொடர்களும் $k(t)$-ன் விரிவுகளாகவே

இருப்பதால், இரண்டு தொடர்களிலும் உள்ள ஒத்த உறுப்புகளின் குணகங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும். ஆகையால் t-ன் ஒரே மாதிரி படிகள் உள்ள உறுப்புகளின் குணங்களை சமப்படுத்த,

$$k_1 = \mu'_1$$

$$k_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = \mu_2$$

$$k_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2 \cdot \mu'_1 + 2(\mu'_1)^3 = \mu_3$$

$$k_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\, \mu'_1 - 3(\mu'_2)^2 + 12\, \mu'_2\, (\mu'_1)^2 - 6(\mu'_1)^4$$

$$= \mu_4 - 3\mu^2_2,$$ என்று கிடைக்கும்.

இதேபோன்று இன்ன பிற குவிவுகளுக்கும், விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்புகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இவ்வாறு, எல்லா குவிவுகளையும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின்மூலம் கணக்கிட முடியும் என்று அறிகிறோம். மேலும் முதலாவது குவிவைத் தவிர, மற்றெல்லா குவிவுகளும் ஆதியைப் பொறுத்த வரை மாற்றமிலாதன என்றும், இத்தொடர்புகளிலிருந்து தெரிகிறது. அதாவது $X, (X + C)$ என்ற வெவ்வேறு மாறிகளுக்கான குவிவுகள் அனைத்தும் (முதலாவது குவிவைத் தவிர சமமாகவே இருக்கும்.

எனவே, ஏதேனும் வசதியான ஒரு எண்ணை மையமாக அல்லது ஆதியாகக் கொண்ட குவிவுகளை கணக்கிடுவதன் மூலம், கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், அச்சராசரியை மையமாக உடைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் எளிதில் காணலாம்.

2 8 3 ஆதியை (பூஜ்யத்தை) மையமாகக் கொண்ட குவிவுச் சார்பு காணுதல். ஒரு கொடுக்கப்பட்ட பரவலின், ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பை $M(t)$ என்க. அப்பரவலின் குவிவுச் சார்பு $k(t)$ எனில்,

$$k(t) = \log M(t)$$

$$= \log \left[\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \cdot p_i \right]$$

இங்கு $X = a + U h$ என்றிடுவோமானுல், $U = \dfrac{X - a}{h}$ என்றுகும்.

$$\therefore \; k(t) = \log \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot e^{t(a + hu_i)} \right]$$

$$= \log \left[e^{at} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{thu_i} \right]$$

$$= at + \log \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{thu_i} \right]$$

$$= at + \log \left[M(th) \right]$$

$$= at + k_1 \frac{(ht)}{\angle 1} + k_2 \frac{(ht)^2}{\angle 2} + \ldots\ldots + k_r \frac{(ht)^r}{\angle r} + \ldots\ldots \to \infty$$

$$= (a + k_1 h)\, t + k_2 \frac{h^2 \cdot t^2}{\angle 2} + \ldots\ldots + k_r \frac{h^r t^r}{\angle r} + \ldots\ldots \to \infty$$

இத்தொடர்பிலிருந்து, முதலாவது குவிவுகளைத் தவிர, U-பரவலின் r-ஆவது குவிவு X-பரவலின் r-ஆவது குவிவைப் போன்று h^r மடங்கு இருக்கும் என்று அறிகிறோம்; இவ்வாறு, ஆதியை மாற்றுவதால் முதலாவது குவிவைத் தவிர, மற்றெல்லா குவிவுகளின் மதிப்புகள் மாறுது என்றும், ஆனுல் மாறியின் அலகு மாற்றத்தால் குவிவுகளின் மதிப்புகள் மாறும் என்றும் தெளிவாகிறது. இதன் காரணமாக குவிவுகளை "அரை-மாற்றமிலி" (Semi-invariant) என்றும் கூறுவதுண்டு.

2 8-4 குவிவுகளின் கூட்டுப்பண்பு: இரண்டு தனித்தனி (சார்பிலா) மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையின் r-ஆவது அம்மாறிகளின் r-ஆவது குவிவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

X, Y என்ற இரண்டு சார்பிலா மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையை Z எனக் கொள்வோம். மேலும் X, Y, Z-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்புகளை முறையே $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$ என்க.

ஆகையால், $M_z(t) = M_x(t)\, M_y(t)$ என்று தெரியும். இதிலிருந்து, $\log M_z(t) = \log M_x(t) + \log M_y(t)$ என்று கிடைக்கும். இச்சமன்பாட்டின் இருபுறமும் t-ன் படியில் விரித்தெழுதி, t^r-ன் குணங்களைச் சமப்படுத்த,

Z-ன் r-ஆவது குவிவு $=$ X-ன் r-ஆவது குவிவு $+$ Y-ன் r-ஆவது குவிவு.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. ஒரு பகடையை ஒருமுறை உருட்டும்போது கிடைக்கப்பெறும் எண்ணின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்ன ?

பகடையின் ஆறு பக்கங்களிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள எண்கள் X என்ற மாறியின் மதிப்புகளைக் குறிக்கும்.

அதாவது, $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

இந்த மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் X அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ என்றும் தெரியும்.

அதாவது, $P(X) = \frac{1}{6}\ (X = 1, 2, \dots 6)$

பகடையை ஒருமுறை உருட்டும்போது, இந்த ஆறு எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்குமாதலால், X-ன் எதிர்நோக்கல்,

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + \dots + 6)$$

$$= 3{\cdot}5$$

2. ஒருவர் பரிசுச் சீட்டு ஒன்று வாங்கினால், முதல் பரிசாகிய ரூ. 1,00,000 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·0001 என்றும் 2-ஆவது பரிசாகிய ரூ. 10,000 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·002 என்றும்,

3-ஆவது பரிசாகிய ரூ 1,000 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·05 என்றும் இருந்தால், அப்பரிசுச் சீட்டிற்கு நியாயமாக கொடுக்கக் கூடிய விலையைக் கண்டுபிடி.

$$\text{இங்கு } X = 1{,}00{,}000,\ 10{,}000,\ 1{,}000$$

$$P(X) = 0{\cdot}0001,\ 0{\cdot}002,\ 0{\cdot}05$$

$$\therefore\quad E(X) = 100000\,X(0{\cdot}0001) + 10{,}000\,X(0{\cdot}002) + 1000\,X(0{\cdot}05)$$

$$= 10 + 20 + 50$$

$$= 80$$

எனவே ஒரு பரிசுச் சீட்டிற்கு நியாயமாகக் கொடுக்கக்கூடிய விலை ரூ. 80/- என்று தெரிகிறது.

3. ஒரு பையில் 5 வெள்ளைப் பந்துகளும், 4 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன. அப்பையிலிருந்து ஒருவர் ஏதேனும் மூன்று பந்துகளை எடுக்க வேண்டும். அவர் எடுக்கும் ஒவ்வொரு வெள்ளைப் பந்துக்கும் ரூ. 5-ம், ஒவ்வொரு பச்சைப் பந்துக்கும் ரூ. 2-ம் கொடுக்கப்படுமானால், அவர் எதிர்பார்க்கும் தொகை எவ்வளவு?

பையிலுள்ள 9 பந்துகளிலிருந்து, 3 பந்துகளை பின்வரும் 4 வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றின் மூலம் எடுக்கக்கூடும்.

(i) 3-ம் வெள்ளைப் பந்துகளாக இருக்கலாம்.

$$\text{இதற்கான நிகழ்தகவு} = \frac{5_{C_3}}{9_{C_3}} = \frac{5}{42};\ i.e.,\ p_1 = \frac{5}{42}$$

(ii) 2 வெள்ளைப் பந்துகளும், ஒரு பச்சைப் பந்துமாக இருக்கலாம்.

$$\text{இதற்குரிய நிகழ்தகவு} = \frac{10}{21};\ i.e.,\ p_2 = \frac{10}{21}$$

(iii) 1 வெள்ளைப் பந்தும், 2 பச்சைப் பந்துகளும் எடுக்கலாம்.

$$\text{இவ்வாறு எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு} = \frac{5}{14};\ i.e.,\ p_3 = \frac{5}{14}.$$

(iv) 3-ம் பச்சைப் பந்துகளாக இருக்கக்கூடும்.

இதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{21}$; *i.e.*, $p_4 = \frac{1}{21}$.

மேலும் X-ன் மதிப்பு ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின்போதும் கிடைக்கக்கூடிய தொகையாகும்.

$\therefore \quad X = x_1, x_2, x_3, x_4$ எனில்

$$x_1 = 3 \times 5 = 15; \quad x_2 = 2 \times 5 + 1 \times 2 = 12;$$

$$x_3 = 1 \times 5 + 2 \times 2 = 9; \quad x_4 = 3 \times 2 = 6.$$

ஆகையால், எதிர்பார்க்கும் தொகை

$$= E(X)$$

$$= 15 \times \frac{5}{42} + 12 \times \frac{10}{21} + 9 \times \frac{5}{14} + 6 \times \frac{1}{21}$$

$$= \frac{25 + 80 + 45 + 4}{14} = \frac{154}{14} = 11 \text{ ரூபாய்.}$$

4. மழை பெய்யக்கூடிய நாளொன்றில் ஒரு குடை வியாபாரியின் வருமானம் ரூ. 120; மழைபெய்யாவிடில் அவருக்கு நஷ்டம் ரூ. 20. குறிப்பிட்ட நாளொன்றில் மழைபெய்வதற்கான நிகழ்தகவு 0·25 என்றால் அவர் எதிர்பார்க்கும் வருமானம் என்ன?

இங்கு $X = 120, -20.$

$$P(X) = 0{\cdot}25, 0{\cdot}75$$

$\therefore$ எதிர்பார்க்கும் வருமானம் $= E(X)$

$$= 120 \times (0{\cdot}25) + (-20) \times (0{\cdot}75)$$

$$= 15 \text{ ரூபாய்.}$$

5. ஒரு பையில் 3 சிவப்பு, 2 பச்சைப் பந்துகள் வைக்கப் பட்டுள்ளன. A, B, C என்ற மூவர் ஒருவர் பின் ஒருவராக அப் பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்துவைத்துக் கொள்கின்றனர். முதலில் ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பவருக்கு ரூ. 100 கிடைக்கு மென்றால், அவர்கள் எதிர்பார்க்கும் தொகையைக் கண்டுபிடி.

A, B, C என்பவர்கள் வெற்றியடையும் நிகழ்ச்சிகளை முறையே E_1, E_2, E_3 என்க. முதலில் A வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவை $P(E_1)$ என்று குறிப்பிட்டால்,

$$P(E_1) = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}.$$

$\therefore$ A எதிர்பார்க்கும் தொகை $= \frac{3}{5} \times 100 = 60$ ரூபாய்.

முதலில் A வெற்றியடையாது B வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவை $P(\bar{E}_1 \cdot E_2)$ என்று குறிப்பிடுவோமானால்,

$$P(\bar{E}_1 \cdot E_2) = P(\bar{E}_1) \cdot P(E_2/\bar{E}_1)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$\therefore$ B எதிர்பார்க்கும் தொகை $= \frac{3}{10} \times 100$

$= 30$ ரூபாய்.

இதேபோன்று A, B இருவரும் வெற்றியடையாது, C வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2 \cdot E_3) = P(\bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_2/E_1) \cdot P(E_3/\bar{E}_1\,\bar{E}_2)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10}$$

$\therefore$ C எதிர்பார்க்கும் தொகை $= \frac{1}{10} \times 100$

$= 10$ ரூபாய்.

6. X என்ற சரிசம வாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் எண்ணிலா மதிப்புகளை, $x_r = \frac{(-1)^r \cdot 2^r}{r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ என்றும், அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளை, $p_r = 2^{-r}$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் $E(X)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$X = x_r \ (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{(-1)^r \cdot 2^r}{r} \ (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{-2}{2}, \frac{2^2}{2}, \frac{-2^3}{3}, \frac{2^4}{4}, \ldots$$

மேலும் $P(X) = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, \ldots$

$$\therefore \quad E(X) = \left(\frac{-2}{1}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2^2}\right) + \frac{-2^3}{3}\left(\frac{1}{2^3}\right) + \cdots$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

$$= -\log 2$$

7. ஒரே மாதிரியான அறுமுகப் பகடைகள் இரண்டை உருட்டும்போது கிடைக்கப்பெறும் எண்களின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

ஒரு பகடையின் ஆறு பக்கங்களில் குறிக்கப்பட்டுள்ள இலக்கங்கள், X எனும் மாறியின் மதிப்புகளாகும். அவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு இலக்கம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ என்று தெரியும்.

$$\therefore \quad X = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

$$P(X) = \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}.$$

$$\therefore \quad E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{7}{2}$$

அதாவது, ஒவ்வொரு பகடையையும் உருட்டும்போது கிடைக்கும் எண்களின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $= \frac{7}{2}$ என்று அறிகிறோம்.

எனவே இரண்டு பகடைகளை உருட்டும்போது கிடைக்கப் பெறும் எண்களின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$= \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$ என்றாகும்.

8. X எனும் சரிசமவாய்ப்பு மாறியின் பரவலுக்கான கூட்டுச் சராசரியும், மாறுபாடும் முறையே 40, 4 என்றால், பின்வருவன வற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $E(X^2)$; (ii) $Var(3X-4)$; (iii) $\sigma(-X)$

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = 40 \text{ ; i.e., } E(X) = 40$$

$$\text{மாறுபாடு} = 4 \text{ ; i.e., } Var(X) = 4$$

$$\text{ஆனால் } Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\text{i.e., } \quad 4 = E(X^2) - (40)^2$$

$$\therefore \quad E(X^2) = 1604$$

$$\text{அடுத்து, } Var(3X-4) = 3^2 \cdot Var(X)$$

$$= 9 \cdot 4 = 36$$

$$\text{இதேபோன்று, } Var(-X) = Var(X)$$

$$= 4$$

$$\therefore \quad \sigma(-X) = \sqrt{4} = 2$$

9. நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கான வழக்கமான குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி,

$$\frac{\partial \mu_r'}{\partial k_j} = {}^r c_j \, \mu'_{r-j} \text{ என்று நிறுவுக.}$$

கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பை $M(t)$ என்றும், குவிவுச் சார்பை $k(t)$ என்றும் கொள்வோம்.

ஆகையால்,

$$k(t) = \log M(t)$$

$$\text{i.e., } k_1 t + k_2 \frac{t^2}{\lfloor 2} + + k_3 \frac{t^3}{\lfloor 3} + \ldots + k_r \cdot \frac{t^r}{\lfloor r} + \ldots\ldots$$

$$= \log \left[1 + \mu_1' t + \mu_2' \frac{t^2}{\lfloor 2} + \ldots + \mu_r' \frac{t^r}{\lfloor r} + \ldots \right]$$

$$\therefore \quad 1 + \mu_1' t + \mu'_2 \frac{t^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots$$

$$= Exp \cdot \left[k_1 t + k_2 \frac{t^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots \right]$$

இத்தொடர்பின் இரண்டுபக்கங்களும், k_j-ஐச் சார்ந்த பகுதி வகைக்கெழு காண, பின்வரும் தொடர்பு கிடைக்கும்.

$$\frac{\partial}{\partial k_j}\left[1+\mu_1' t\,\mu_2'\frac{t^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\mu_r'\frac{t^r}{\lfloor r}+\cdots\right]$$

$$=\frac{t^j}{\lfloor j}\cdot \operatorname{Exp}\cdot\left[k_1\,t\,k_2\frac{t^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+k_j\frac{t^j}{\lfloor j}+\cdots\cdots\right]$$

$$i.e., \sum_{r=1}^{\infty}\frac{t^r}{\lfloor r}\left(\frac{\partial \mu_r'}{\partial k_j}\right)=\frac{t^j}{\lfloor j}\left[1+\mu_1' t+\mu_2'\frac{t^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\mu'_{r-j}\frac{t^{r-j}}{\lfloor r-j}+\cdots\cdots\right]$$

இச்சமன்பாட்டின் இரண்டுபக்கங்களும் உள்ள t^r-ன் குணகங்களை சமப்படுத்த,

$$\frac{1}{\lfloor r}\frac{\partial \mu_r'}{\partial k_j}=\frac{1}{\lfloor j}\cdot\frac{\mu'_{r-j}}{\lfloor r-j}$$ என்று கிடைக்கும்.

$$i.e., \frac{\partial \mu_r'}{\partial k_j}=\frac{\lfloor r}{\lfloor j\cdot\lfloor r-j}\cdot\mu'_{r-j}$$

$$={}^{r}c_j\cdot\mu'_{r-j}$$

பயிற்சி 2.

1. நான்கு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டினால், நான்கும் தலைகளாக கிடைப்பதற்கான எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்ன? [விடை 2]

2. சமச்சீரான n பகடைகளை உருட்டும்போது கிடைக்கப் பெறும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. $\left[\text{விடை } \frac{7n}{2}\right]$

3. இரட்டை எண்களாக பல்வேறு வழிகளிலும் கிடைக்கும் வரையில், ஒரு ஜோடி பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. அப் பகடைகளை எத்தனை முறை உருட்டவேண்டுமென எதிர் பார்க்கலாம்? [விடை 89]

4. ஒரே சீரான நாணயம் ஒன்றை ஒருவர் சுண்டிவிடும் போது, பூ கிடைக்குமானால் ஒரு ரூபாய் லாபமும், தலை கிடைக்குமானால் ஒரு ரூபாய் நஷ்டமும் அவருக்கு ஏற்படும். ஒரு முறை நாணயத்தை சுண்டும்போது பூ கிடைத்தால், அத்துடன் அவர் ஆட்டத்தைவிட்டு விலகிவிடுவார். ஆனால் முதலில் தலை விழுந்தால், அவர் மீண்டும் ஒரு முறை நாணயத்தை சுண்டுவார். அவர் எதிர்பார்க்கும் லாபம் எவ்வளவு ? [விடை 0]

5. முதல் பத்து இயற்கை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட பத்து சீட்டுகள் ஒரு பெட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒருவர் அச் சீட்டுகளில் ஏதேனும் ஒன்றை எடுத்து அதில் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண்ணை தெரிந்து கொண்டதும், மீண்டும் அச்சீட்டை பெட்டியில் வைத்துவிடுவார். இவ்வாறு அவர் இரண்டு சீட்டுகளை எடுத்தார். X என்பது, எடுக்கப்படும் சீட்டுகளில் உள்ள மீப்பெரும் எண்ணைக் குறிக்குமாயின், X-ன் எதிர்நோக்கலைக் கண்டுபிடி.

[விடை $\frac{143}{200}$]

6. ஒரு பையில் 'a' வெள்ளைப் பந்துகளும், 'b' கறுப்புப் பந்துகளும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. முதலில் ஒரு வெள்ளைப் பந்து கிடைக்கும் வரையில், அப்பையிலிருந்து ஒவ்வொரு பந்தாக எடுக்கப்படுகிறது. ஒரு வெள்ளைப் பந்து கிடைப்பதற்கு முன்னால் எடுக்கப்படும் கறுப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையின் எதிர் நோக்கல் எவ்வளவு என்று காண்க. [விடை $\frac{b}{a+1}$]

7. பின்வரும் அட்டவணையிலுள்ள விவரங்களைப் பயன் படுத்தி $E(X)$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடு. மேலும் $E(X-3\cdot4)^2 = E(X)^2 - [E(X)^2]$ என்று காட்டு.

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0·1	0·1	0·3	0·3	0·2

[விடை $E(X) = 3\cdot4$]

8. ஒரு பையில் 3 சிவப்புப் பந்துகளும், 5 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன. அப்பையிலிருந்து ஒருவர் எடுக்கும் ஒவ்வொரு சிவப்புப்

பந்துக்கும் ரூ. 70-ம், ஒவ்வொரு பச்சைப்பந்துக்கும் ரூ. 7-ம் கிடைக்கும். அவர் இரண்டு பந்துகள் எடுத்தால், அவர் எதிர்பார்க்கும் தொகை எவ்வளவு ? [விடை ரூ 61·20]

9. ஒரு பெட்டியில் ஒன்றிலிருந்து n வரை உள்ள எண்கள் குறிக்கப்பட்ட n சீட்டுகள் உள்ளன. ஒரு குலுக்கலின் போது அப்பெட்டியிலிருந்து எடுக்கப்படும் m சீட்டுகளில் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பைக் காண்க. $\left[\text{விடை } \dfrac{m(n+1)}{2}\right]$

10. ஒரு பரிசோதனை n சார்பிலா வெவ்வேறு முயற்சிகளினுல் நடத்தப்படுகிறது. அவற்றுள் r-ஆவது முயற்சியில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு p_r என்றுல், வெற்றிகளின் சாரசரி, மதிப்பைக் கணக்கிடு. $\left[\text{விடை } \sum_{i=1}^{n} p_i\right]$

11. ஒரு பெட்டியில் 4 சிவப்புப் பளிங்குக் கோலிகளும் 6 வெள்ளைப் பளிங்குக் கோலிகளும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் 3 கோலிகள் எடுக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு முறையும் எடுக்கப்படும் சிவப்புக் கோலிகளின் எண்ணிக்கையை X எனக் குறிப்பிட்டால், சரிசமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலை அட்டவணைப்படுத்து. அட்டவணையிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியையும், மாறுபாட்டையும் கணக்கிடவும்.

விடை (i)

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

[(ii) 1·2
(iii) 0·56]

12. சமச்சீரான 3 நாணயங்களை சுண்டிவிடும் விளையாட்டில், A, B, என்ற இருவர் பங்கு கொள்கின்றனர். முதலில் யாருக்குப் பூ கிடைக்கிறதோ அவர் வெற்றியடைந்ததாகக் கருதப்படுவார். போட்டிக்கான மொத்தத் தொகை ரூ 20 என்று குறிப்பிடப் பட்டுள்ளது. A என்பவர் முதலில் விளையாட்டை ஆரம்பித்தால் விளையாட்டு இருவருக்கும் நேர்மையானதாக அமைவதற்கு ஒவ்வொருவரும் கொடுக்கும் தொகை என்ன ?

[விடை A—ரூ 12·50
B—ரூ 7·50]

3. தொடர்ச்சியற்ற நிகழ்தகவுப் பரவல்கள்

(DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

இதுகாறும் நிகழ்தகவுப் பரவல்களின் பொதுப் பண்புகளைப் பற்றியும் அவற்றை அளவிட பயன்படும் கணியங்களைப்பற்றியும் பார்த்தோம். இனி சில குறிப்பிட்ட பரவல்களைப் பற்றியும், அவற்றின் தனித்தன்மைகளைப் பற்றியும், அவை எவ்வாறு நடைமுறையில் பல துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதையும் கவனிப்போம். இத்தொடர்ச்சியற்ற பரவல்களில் முக்கியமான ஈருறுப்புப் பரவலையும்,பாய்சான் பரவலையும் முதலில் எடுத்துக் கொள்வோம். பின்னர் வேறு சில பரவல்களைப் பற்றியும் படிப்போம்.

3·1 ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial Distribution)

3 1-1 வரையறை ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்படும் பல முயற்சிகளிலும், அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு மாருமலிருப்பின், அம்முயற்சிகளை ' சார்பிலாதன '' என்கிரும். மேலும் அடுத்தடுத்து எடுத்துக்கொள்ளப்படும் முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் வெற்றி அல்லது தோல்வி என்ற இரண்டு விளைவுகள் (முடிவுகள்) மட்டும் கிடைக்கும் என்றிருப்பின், அத்தகைய முயற்சிகளை ''பெர்னெளலி முயற்சிகள்'' (Bernoulli Trials) என்கிரும்.

p, q என்பன முறையே ஒரு நிகழ்ச்சி வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும், தோல்வி அடைவதற்கான நிகழ்தகவையும் குறிக்கும் என்க. அந்நிகழ்ச்சிக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்படும் n பெர்னெளலி முயற்சிகளுள், ஏதேனும் r முயற்சிகளில் நிகழ்ச்சி வெற்றி அடைவதற்கும், மீதியுள்ள முயற்சிகளில் தோல்வியுறுவதற்குமான கூட்டு நிகழ்தகவு

${}^{n}c_r \cdot p^r \cdot q^{n-r}$ என்று பார்த்துள்ளோம். இங்கு $p + q = 1$ என்றும் தெரியும்.

ஆகையால் 0, 1, 2, …… n முயற்சிகளில் அந்நிகழ்ச்சி வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே

$q^n, {}^{n}c_1 \cdot p \cdot q^{n-1}\ {}^{n}c_2, p^2\ q^{n-2},$ …… p^n என்றும் அறிகிறோம்;

அதாவது, X என்ற வாய்ப்பு மாறி 0, 1, 2, …… n என்ற மதிப்புகளை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே,

$(q + p)^n$ எனும் ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவிலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் என்று நன்கு விளங்கும். இத்தகைய நிகழ்தகவுகளையுடைய X எனும் மாறியின் பரவலை "ஈருறுப்புப் பரவல்" என்று கூறுகிறோம்.

இப்பரவலை முதன் முதலில் கண்டுபிடித்த பெர்னெவ்லி என்ற கணித மேதையின் ஞாபகார்த்தமாக, இதை "பெர்னெவ்லி பரவல்" என்றும் அழைப்பதுண்டு.

இங்கு n, p (அல்லது $q = 1 - p$) என்ற இரண்டு சார்பிலா மாறிலிகள் உள்ளன. இவற்றை ஈருறுப்புப் பரவலின் துணை அலகுகள் என்று கூறுவதுண்டு.

X-ன் மதிப்பு 0, 1, 2, 3 …… n என்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகை "ஒன்று" என்றிருக்கும் ஏனெனில்,

$$\text{நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகை} = \sum_{x=0}^{n} P(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}^{n}c_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$= (q + p)^n = 1$$

மேலும் $p = q = \frac{1}{2}$ என்றிருக்குமாறு அமைந்துள்ள பரவல்களை சீரானவை என்றும், அவ்வாறில்லாவிடில் ($i.e., p \neq q$) அவை சீரில்லாப் பரவல்கள் என்றும் கூறப்படும்.

3·1-2 ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் காணுதல்: n பெர்னௌலி முயற்சிகளில் கிடைக்கப்பெறும் பல்வேறு வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை X என்ற வாய்ப்பு மாறி குறிப்பதாகக் கொள்வோம். ஆகையால் ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $E(X)$ என்பதாம்.

$$\text{இப்பொழுது, } \bar{X} = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot {}^{n}c_x \cdot q^{n-x} p^x$$

$$\text{i.e., } \mu'_1 = 0 + 1\, {}^{n}c_1\, q^{n-1} p + 2\, {}^{n}c_2\, q^{n-2} p^2 + \ldots\ldots + n p_n$$

$$= n\, q^{n-1} p + 2\, \frac{n(n-1)}{2}\, q^{n-2} p^2 + \ldots\ldots + n p^n$$

$$= np \left[q^{n-1} + (n-1)\, q^{n-2} p + \frac{(n-1)(n-1)}{1\cdot 2}\, q^{n-2} p^2 + \ldots\ldots + p^{n-1} \right]$$

$$= np\, [(q+p)^{n-1}]$$

$$= np \qquad (\because\ q + p = 1)$$

$$\text{இதேபோன்று, } E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2\, {}^{n}c_x\, q^{n-x} p^x$$

$$\text{i.e., } \mu'_2 = \sum_{x=0}^{n} [x + x(x-1)]\, {}^{n}c_x\, q^{n-x} p^x$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\, {}^{n}c_x\, q^{n-x} p^x + \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\, {}^{n}c_x\, q^{n-x} p^x$$

$$= E(X) + n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} [{}^{n-2}c_{x-2}\, q^{n-x} p^{x-2}]$$

$$i.e., \quad \mu'_2 = np + n(n-1)p^2 (q+p)^{n-2}$$
$$= np + n(n-1)p^2 \, 1$$
$$= np(q+np)$$

$$111^{rly} \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= np(q+np) - (np)^2$$
$$i.e., \quad \mu'_2 = npq$$
$$\therefore \quad \sigma = +\sqrt{npq}$$

அடுத்து, $$\mu'_3 = \sum_{x=0}^{n} x^3 \, {}^nc_x \, q^{n-x} p^x$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x] \; {}^nc_x \, q^{n-x} p^x$$

$$= n(n-1)(n-2)p^3 \sum_{x=3}^{n} {}^{n-3}c_{x-3} \, q^{n-x} p^{x-3}$$

$$+ 3n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} {}^{n-2}c_{x-2} \, q^{n-x} p^{x-2}$$

$$+ np \sum_{x=1}^{n} {}^{n-1}c_{x-1} \, q^{n-x} p^{x-1}$$

$$= n(n-1)(n-2)p^3 (q+p)^{n-3} + 3n(n-1) \, p^2 (q+p)^{n-2} + np(q+p)^{n-1}$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$

இதிலிருந்து, $$\mu_3 = \mu''_3 - 3\mu'_2 \mu'_1 + 2(\mu'_1)^3$$
$$= npq(q-p)$$

$$111^{rly} \quad \mu'_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np$$ என்றும்

$$\mu_4 = npq[1 + 3(n-2)pq]$$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

துணை முடிவுகள்

$$\text{(i)} \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{n^2 p^2 q^2 (q-p)^2}{n^3 p^3 q^3} = \frac{(q-p)^2}{npq}$$

$$\gamma_1 = \pm \sqrt{\beta_1} = \pm \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}}$$

எனவே, $q = p$ என்றிருந்தாலும், $q \neq p$ எனும்போது n மிகப் பெரிய எண் என்றாலும், β_1-ன் தோராய மதிப்பு பூஜ்யமாகிறது. இந்நிலையில், ஈருறுப்புப் பரவல் சீரான தொன்றாகும்.

$q = p$ என்றமையும்போது; γ_1-ம் பூஜ்யமாகிறது, எனவே, γ_1 என்பது ஒரு கோட்ட அளவையாக இருப்பதால், $q = p$ எனில் ஈருறுப்புப்பரவல் சீரானதாக இருக்கும் என்று தெரிகிறது.

மேலும், $p < \frac{1}{2}$ எனில், பரவலின் கோட்டம் மிகையானது என்றும்

$p > \frac{1}{2}$ எனில், பரவலின் கோட்டம் குறையானது என்றும் கூறுவோம்.

$$\text{அடுத்து,} \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{1-6pq}{npq};$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{1-6pq}{npq}$$

ஆகையால், n-ன் மதிப்பு எல்லையில்லாமல் அதிகரிக்கும் போது, β_2-ன் மதிப்பு 3-ஐ அணுகும் என்றும், γ_2-ன் மதிப்பு பூஜ்யத்தை அணுகும் என்றும் விளங்குகிறது.

3·1-3 ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு : ஈருறுப்புப் பரவலின், பூஜ்யத்தை மையமாகக் கொண்ட, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு $M(t)$ எனில்,

$$M(t) = E[e^{tx}]$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [e^{tx} \cdot {}^{n}C_{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}]$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [{}^{n}c_x \cdot (p \cdot e^t)^x \cdot q^{n-x}]$$

$$= (q + pe^t)^n$$

இதிலிருந்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை எளிதாகக் காணும் முறையே இங்கு பார்ப்போம்.

$$\mu_1' = \left\{ \frac{d}{dt} [M(t)] \right\}_{t=0}$$ என்று தெரியும்.

$$\therefore \quad \mu_1' = [n \cdot (q + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t]_{t=0}$$

$$= n \cdot (1)^{n-1} \cdot p = np$$

111rly $$\mu'_2 = \left[\frac{d^2 M(t)}{dt^2} \right]_{t=0}$$

$$= [np \cdot e^t (q + pe^t)^{n-1} + npe^t \cdot (n-1) (q + pe^t)^{n-2} \cdot pe^t]_{t=0}$$

$$= np + np (n-1) \cdot p$$

$$= npq + n^2 p^2$$

இதேபோன்று, t-ஐச் சார்ந்த $M(t)$-ன் வெவ்வேறு வகைக் கெழுக்களின் மதிப்புகளை, $t = 0$ என்றிருக்கும்போது கணக்கிடு வதன் மூலம், வெவ்வேறு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கிடைக்கப்பெறும்.

3.1.4 ஈருறுப்புப் பரவலின் குவிவுகள் : ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $\mu_1' = np$-ஐ மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பை $M_{\mu_1'}(t)$ என்று குறிப்பிட்டால், பின்

$$M_{\mu_1'}(t) = E [e^{t(x-np)}]$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [e^{t(x-np)} \cdot {}^{n}c_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}]$$

$$= e^{-npt} \cdot \sum_{x=0}^{n} [\, {}^{n}c_x \cdot (p \cdot e^t)^x \cdot q^{n-x} \,]$$

$$= e^{-npt} \cdot (q + pe^t)^n$$

$$= (q\, \epsilon^{-pt} + p \cdot \epsilon^{qt})^n$$

$$= \Bigg[q \left(1 - \frac{pt}{\angle 1} + \frac{p^2 t^2}{\angle 2} - \frac{p^3 t^2}{\angle 3} + \cdots \right)$$

$$+ p \cdot \left(1 + \frac{qt}{\angle 1} + \frac{q^2 t^2}{\angle 2} + \frac{q^3 t^3}{\angle 3} + \cdots\cdots \right) \Bigg]^n$$

$$= \Bigg[1 + (pq) \frac{t^2}{\angle 2} + (pq)(q^2 - p^2) \frac{t^3}{\angle 3}$$

$$+ (pq)(q^3 + p^3) \frac{t^4}{\angle 4} + \cdots\cdots \Bigg]^n$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் குவிவுச் சார்பை, $k(t)$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$k(t) = \log M_{\mu_1'}(t)$$

$$= n \cdot \log \left[1 + (pq) \frac{t^2}{\angle 2} + pq(q^2 - p^2) \frac{t^3}{\angle 3} + \cdots\cdots \right]$$

$$= n \Bigg\{ \left[(pq) \frac{t^2}{\angle 2} + (pq)(q^2 - p^2) \frac{t^3}{\angle 3} + \cdots\cdots \right]$$

$$- \frac{1}{2} \left[(pq) \frac{t^2}{\angle 2} + (pq)(q^2 - p^2) \frac{t^3}{\angle 3} + \cdots\cdots \right]^2$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Bigg\}$$

ஆனால் $k(t) = k_1 t + k_2 \frac{t^2}{\angle 2} + k_3 \frac{t^3}{\angle 3} + \cdots\cdots\cdots$, என்று கொள்வோமானால், $k_1, k_2, k_3 \cdots\cdots\cdots$ என்பன குவிவுகளாகும். எனவே $k(t)$-ன் இருவேறு விரிவுகளிலுமுள்ள ஒத்த குணகங்களைச் சமப்படுத்த,

$$k_2 = npq,$$
$$k_3 = npq\,(q^2 - p^2) = npq\,(q - p),$$
$$k_4 = npq\,(q^3 + p^3) - 3\,np^2\,q^2 = npq\,(1 - 6pq),$$

என்று கிடைக்கும். இன்னபிற குவிவுகளையும் இதேபோன்று கணக்கிடலாம்.

மேலும் $k_1 = \mu_1' = np$ என்றும் தெரியும்.

3·1-5 ஈருறுப்புப் பரவலின் முகடு காணுதல்: கொடுக்கப்பட்ட பரவலில், குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஒன்றின் வெற்றி வாய்ப்பு மிக அதிகமாக இருக்கும் நிலையை, அப்பரவலின் முகடு என்கிறோம். அதாவது மீப்பெரு மதிப்புள்ள நிகழ்தகவையுடைய வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை கணக்கிடுவதன் மூலம், பரவலின் முகடு கிடைக்கும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின், r வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(r - 1)$ வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை விடப் பெரியதாகவோ, அல்லது சமமாகவோ இருப்பின்,

$$n_{c_r} \cdot q^{n-r} \cdot p^r \geq n_{c_{r-1}} \cdot q^{n-r+1} \cdot p^{r-1}$$ என்றாகும்.

$$i.e., \frac{\angle n}{\angle r \;\angle n-r} \cdot p \geq \frac{\angle n}{\angle r-1 \cdot \angle n-r+1} \cdot q$$

$$i.e., p \cdot (n - r + 1) \geq q \cdot r$$

$$i.e., (n + 1)\,p \geq (p + q)\,r$$
$$\geq r$$

$$i.e., \quad r \leq (n + 1)\,p \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

இதேபோன்று, r வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $(r + 1)$ வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை விட பெரியதாகவோ, அல்லது சமமாகவோ இருப்பின் கீழ்க் காணும் சமனின்மை கிடைக்கும்.

$$r \geq (n + 1)\,p - 1 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

ஆகையால் சமனின்மைகள் (1), (2)-லிருந்து

$(n + 1)\,p - 1 \leq r \leq (n + 1)\,p$ என்று தெரிகிறது.

இங்கு இரண்டு வகைகள் எழக்கூடும். அவையாவன.

(*i*) $(n+1)p$ என்பது ஒரு முழு எண்ணுக இருந்தால், அதை m எனக் கொள்வோம். ஆகையால் r-ன் மதிப்பு $(m-1)$-ஐ அடையும்வரை, அவ்வெற்றிகளுக்கு ஒப்பான நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகள் அதிகரித்துக் கொண்டே வரும். மேலும் $(m-1)$ வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவும், m வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவும் சமமாக இருக்கும். அதாவது $P(m-1) = P(m)$ என்ருகும்.

பிறகு r-ன் மதிப்பு m-ஐ விட அதிகரிக்கும் போது, நிகழ்தகவின் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே செல்லும்.

எனவே, $P(m) = P(m-1)$ எனும் நிகழ்தகவு தான், மற்ற எந்த நிகழ்தகவையும்விட அதிக மதிப்புடையது என அறிகிரும். ஆகையால் இந் நிகழ்தகவுகளுக்கு ஒப்பான $x = (m-1)$, $x = m$ என்ற எண்கள்தான் ஈருறுப்புப் பரவலின் முகடுகளாகும்.

இவ்வாறு இரண்டு முகடுகளை உடைய பரவலை, இரு முகட்டுப் பரவல் என்று கூறுவதுண்டு.

பொதுவாக, இரண்டு முகடுகள் கிடைக்கும்போது, அவற்றின் சராசரி மதிப்பாகிய $x = \left(m - \frac{1}{2}\right)$ என்ற எண்ணைத் தான் முகடாகக் கொள்வது வழக்கமாக உள்ளது.

(*ii*) $(n+1)p$ என்பது ஒரு முழு எண்ணுக இராவிடில், $(m+1)p = m' + f$ என்க. இங்கு m' என்பது முழு எண் எனவும், f பின்னம் எனவும் கொள்கிரும். ஆகையால் $r = m'$ என்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு வேறு எந்த நிகழ்தகவின் மதிப்பையும் விட அதிகமாக இருக்கும்.

அதாவது $P(m')$-ன் மதிப்புதான் மிக அதிகமானதாக இருக்கும். எனவே $x = m'$ என்ற மதிப்பு தான் பரவலின் முகடு என்கிரும்.

3·1-6 ஈருறுப்பு நிகழ்வெண் பரவல் : n தனித்தனி முயற்சிகள் அடங்கிய ஒரு பரிசோதனையை N தடவைகள் அடுத்தடுத்து செய்வதாகக் கொள்வோம். பின், ஒவ்வொரு பரிசோதனையின் போதும் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிக்கு r வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $[n_{C_r} \cdot q^{n-r} \cdot p^r]$ என்றிருப்பதால், எல்லா N

பரிசோதனைகளிலும் அந்நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு $[N \cdot n_{c_r} \cdot q^{n-r} \cdot p^r]$ என்று தெரிகிறது. இதை N பரிசோதனைகள் ஒவ்வொன்றிலும், r தடவைகள் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி வெற்றியடைய "எதிர் பார்க்கும் நிகழ்வெண்" என்று கூறுவர். இவ்வாறு அந்நிகழ்ச்சிக்கான வெற்றிகளின் வெவ்வேறு எண்ணிக்கைகளும், அவற்றிற்கு ஒப்பான நிகழ்தகவுகளும் சேர்ந்து "ஈருறுப்பு நிகழ்வெண் பரவலை" உண்டாக்குகின்றன என்கிறோம்.

நடைமுறையில், பரிசோதனைகளின் மூலம் கண்டறியும் நிகழ்வெண்கள், எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்களிலிருந்து சிறிது மாறு படக்கூடும். மேலும், N வெவ்வேறு பரிசோதனைகளில், ஒவ்வொன்றிலும் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிக்கு $0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$ வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $N \cdot (q+p)^n$ எனும் கோவையின் விரிவிலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் என்று அறியலாம்.

3·1-7 செபீ செவ்-சமனின்மை (Tcheby Cheffi Inequality) : $\bar{X}$-ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் σ-ஐ திட்டவிலக்கமாகவும் உடைய X எனும் சரிசம வாய்ப்பு மாறியை எடுத்துக் கொள்வோம். t என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை எண் என்க. பின், X-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கும் $\bar{X}$-க்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் $(t\sigma)$-ஐவிட அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\left(\frac{1}{t^2}\right)$-ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாது. என்று நிறுவலாம்.

அதாவது $P[\,|X-\bar{X}|\, \geq t\sigma] \leq \frac{1}{t^2}$

நிரூபணம்

X எனும் மாறி x_i என்ற மதிப்பை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவை p_i எனக் கொள்வோம். மேலும் δ என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை எண்ணாக இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\sigma^2 = E[(X-\bar{X})^2]$

$$= \sum_{i=0}^{n} (x_i - \bar{X})^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{X-\delta} (x_i - \bar{X})^2 p_i + \sum_{i=\bar{x}-\delta}^{\bar{X}\ \delta} (x_i - \bar{X})^2 \cdot p_i$$

$$+ \sum_{i=\bar{x}+\delta}^{n} (x_i - \bar{X})^2 p_i$$

$$\therefore \quad \sigma^2 \geq \sum_{i=1}^{\bar{-}-\delta} (x_i - \bar{X})^2 p_i \sum_{i=\bar{x}+\delta}^{n} (\bar{x}_i - \bar{X})^2 p_i$$

மேலும், $(x_i - \bar{X})^2 > \delta^2$ என்று எடுத்துக் கொள்வோமானல் $| x_i - \bar{X} | > \delta$ என்ருகும்.

எனவே, $\sigma^2 \geq \delta^2 \left[\sum_{i=0}^{\bar{X}-\delta} (p_i) + \sum_{i=\bar{X}+\delta}^{n} (p_i) \right]$

$$\geq \delta^2 [P(X \leq \bar{X} - \delta) + P(X \geq \bar{X} + \delta)]$$

$$\geq \delta^2 [P \ | X - \bar{X} | \geq \delta]$$

$$i.e., \frac{\sigma^2}{\delta^2} \geq P[\ | X - \bar{X} | \geq \delta]$$

இதில் $\delta = \sigma t$ என்றிட,

$P[\ | X - x | \geq t\sigma] \leq \frac{1}{t^2}$ என்று கிடைக்கும்.

இதையே $P[\ | X - \bar{X} | < t\sigma] \geq \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$ என்றும் கூறலாம்.

குறிப்பு: இந்த சமனின்மை, X-ன் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து திட்ட விலக்கத்தின் t மடங்கை விட அதிகமாக மாறுபடுவதற்கான நிகழ் தகவின் மேல்எல்லையை வரையறுக்கின்றது என்பதை அறியலாம்.

3.1-7-a : துணை முடிவு

'பெரிய எண்களின் விதி' அல்லது 'பேரினங்களின் விதி'
(Law of Large Numbers)

மேலே நிறுவிய சமனின்மையில்,

$$X = \frac{1}{n}[X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n]$$ என்றிடுவோம்.

$$\therefore\ E(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} E[X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n]$$

$$i.e.,\ \bar{X} = \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + \dots\dots + E(X_n)]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

மேலும், $Y = (X - \bar{X})^2$ என்றிட,

$$Y = \left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_i)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n}\{X_i - E(X_i)\right]^2$$

என்றாகும்.

$E(Y) = B_n$ என்க.

$t\sqrt{\frac{B_n}{n^2}} = \in$ என்றிருக்குமாறு, E எனும் மிகச்சிறிய மிகை எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். பின் செபி-செவ்-சமனின்மையிலிருந்து $P[(X - \bar{X}) < \in] \geq 1 - \frac{B_n}{n^2 \in^2}$ என்று கிடைக்கும்.

$$P\left[\left\{\frac{X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots\dots + E(X_n)}{n}\right\} < \in\right] \geq 1 - \eta$$

(இங்கு, $\frac{B_n}{n_1 \in^2} \leqslant \eta$ என எடுத்துள்ளோம்.)

அதாவது, $\in$ எனும் ஏதேனும் ஒரு மிகச்சிறிய மிகை எண் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், n சரிசமவாய்ப்பு மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகளின் சராசரிக்கும், அவற்றின் எதிர் நோக்கல்களின் சராசரிக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் $\in$-ஐ விட சிறிதாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு ஒன்று என்ற எண்ணை அணுக வேண்டுமானல், n-ன் மதிப்பு மிகப் பெரியதாக இருந்து அது முடிவிலியை அணுகும் போது, $\frac{B_n}{n^2}$ பூஜ்யத்தை அணுக வேண்டும்.

இம் முடிவை "பேரினங்களின் விதி" என்று அழைக்கிறோம்.

3.1.8 பெர்னெவ்லி தேற்றம்: n தனித்தனி பெர்னெவ்லி முயற்சிகளில், வெற்றி பெறக்கூடிய முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை m என்றும், இந்த m முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றிலும் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவை p எனும் மாருத எண் என்றும் எடுத்துக்கொள்வோம். பின் $\in$., η என்ற ஏதேனும் இரண்டு மிகச் சிறிய மிகை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றைச் சார்ந்த N என்ற ஒரு எண்ணை,

$n > N$ என்றிருக்கும்போது, $1 \geq P\left[\,\left|\frac{m}{n}-p\right| < \in\right]$ $> 1-\eta$ என்பது உண்மையாக இருக்குமாறு கண்டுபிடிக்கலாம்.

நிரூபணம்

வெற்றிகளுக்கான நிகழ்வெண்களின் (அலை வெண்களின்) கூட்டுச் சராசரி np என்றும், மாறுபாடு npq, $(q = 1-p)$ என்றும் தெரியும். இதேபோன்று சார் அலை வெண்களின் கூட்டுச் சராசரி p என்றும், மாறுபாடு $\frac{pq}{n}$ என்றும் அறிவோம்.

$\frac{m}{n}$ என்ற மாறிக்கு செபீ-செவ் சமனின்மையை பயன்படுத்துவோமாயின்,

$$P\left[\left|\frac{m}{n}-p\right| < \in\right] \geq 1-\frac{pq}{n\in^2} \quad \left(\because \ \sigma^2 = \frac{pq}{n}\right)$$

இங்கு $N = 1 + \frac{pq}{\eta\in^2}$ என்றும், n-ன் மதிப்பு N-ஐ விட அதிகமாக இருக்குமாறும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

i.e., $n > N$ என்றால், $\quad n > 1 + \frac{pq}{\eta \in^2}$ என்றாகும்.

i.e., $n > N$ எனும் போது, $n > \frac{pq}{\eta \in^2}$ என்றிருக்கும்.

i.e., $n > N$ எனும் போது, $\eta > \frac{pq}{n \in^2}$ என்றமையும்.

$\therefore \quad n > N$ என்றால், $P\left[1 \frac{m}{n} - p \mid < \in \right] > 1 - \eta$ என்பது உண்மை. மேலும் நிகழ்தகவின் மதிப்பு ஒன்றைவிட குறைவாகவோ, அல்லது ஒன்றுக்குச் சமமாகவோ இருக்குமாதலால்,

$$1 \geq P\left[1 \frac{m}{n} - p \mid < \in \right] > 1 - \eta \text{ என்றாகும்.}$$

குறிப்பு: முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையாகிய n-ஐ வேண்டிய அளவுக்கு அதிகரிப்பதன் மூலம், சார் நிகழ்வெண் $\frac{m}{n}$-க்கும் p-க்குமிடையே உள்ள வித்தியாசம் ஏதேனும் ஒரு மிகச் சிறிய மிகை எண் $\in$-ஐ விட குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை ஒன்றுக்கு மிக நெருக்கமாக (நாம் விரும்பும் அளவுக்கு) அமைக்க முடியும் என்று இத் தேற்றத்தின் மூலம் அறிகிறோம்.

இதிலிருந்து, முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை எண்ணிலடங்காது அதிகரிக்கும் போது, சார் நிகழ்வெண் $\frac{m}{n}$-ன் மதிப்பும், வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p-ன் மதிப்பும் சமமாகும் என்று தெரிகிறது. அதாவது நடைமுறையில் கணித இயல் நிகழ்தகவும், புள்ளியியல் நிகழ்தகவும் ஒன்று தான் என்று இத் தேற்றத்தின் மூலம் விளங்கும்.

3.2. பாய்சான் பரவல் (Poisson Distribution)

3.2.1. வரையறை: ஈருறுப்புப் பரவலில் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மிகச்சிறியதாக இருந்து, எண்ணிலடங்கா முயற்சிகளின் விளைவுகளை எடுத்துக் கொள்வோமானால், அவை ஈருறுப்புப் பரவலிலிருந்து மாறுபட்ட பரவல் ஒன்றை உருவாக்கும். அதாவது, p-ன் மதிப்பு மிகக் குறைவானது என்றும், n-ன் மதிப்பு மிகப்பெரிது என்றும்; ஆனால் வெற்றிகளின் சராசரியாகிய np-ன்

மதிப்பு முடிவுடைய ஒரு எண்ணாக இருக்கும் என்றும் கொள்வோமானால், ஈருறுப்புப் பரவல் வேறு ஒரு பரவலாக மாறும் என்று கண்டுள்ளனர். அப்பரவலை ''பாய்சான் பரவல்'' என்று அழைக்கின்றனர். இப்பரவலை 19-ம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் பாய்சான் என்ற விஞ்ஞானி முதன் முதலில் கண்டுபிடித்தமையால், அவர் பெயரையே அப்பரவலுக்கும் வைக்கப்பட்டுள்ளது.

அன்றாட வாழ்க்கையில் மிக அரிதாக நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் கூட ஏதேனும் ஒரு ஒழுங்கு விதியின் அடிப்படையில் தான் நடைபெறும் என்பது இப்பரவலின் மூலம் தெரியவரும்.

3.2-2 ஈருறுப்புப் பரவலிலிருந்து பாய்சான் பரவலைப் பெறுதல் : ஈருறுப்புப் பரவலில் n முயற்சிகளுள் x முயற்சிகளில் ஒரு நிகழ்ச்சி வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவினை $P(x)$ என்று குறிப்பிட்டால்,

$P(x) = {}^nc_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ என்று தெரியும்.

இங்கு np எனும் பெருக்குத் தொகை ஒரு முடிவுடைய எண்ணாக இருக்குமாறு, p பூஜ்யத்தையும், n முடிவிலியையும் அணுகும் எனக்கொள்வோம்.

அதாவது, $p \to 0$; $n \to \infty$ எனும்போது, $np = m$ என்ற முடிவுடைய எண்ணாக அமையும். ஆகையால் $p = \frac{m}{n}$ என்றிட,

$$P(x) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots x} \left(\frac{m}{n}\right)^x \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{m^x}{\angle x} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \ldots\ldots \frac{n-x+1}{n} \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{m^x}{\angle x} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \ldots\ldots \left(1-\frac{x-1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{-x}$$

ஆகையால் $\underset{n \to \infty}{Lt} P(x)$

$$= \frac{m^x}{\angle x} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots\ldots 1 \cdot \underset{n \to \infty}{Lt} \left[1 - \frac{m}{n}\right]^n \cdot 1.$$

$$= \frac{m^x}{\angle x} \cdot \underset{n \to \infty}{Lt} \left[\left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-\frac{n}{m}}\right]^{-n}$$

$$= \frac{m_x}{\angle x} \cdot [e]^{-m} = \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$$

அதாவது, பாய்சான் பரவலில் x வெற்றிக்குரிய அலைவெண் $= \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$ எனவே, 0, 1, 2, ... வெற்றிகளுக்கான அலைவெண் (நிகழ்தகவுகளின்) கூடுதலை N எனக் கொள்வோமானால்,

$$N = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x} \text{ என்றாகும்.}$$

$$= e^{-m} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{\angle x}$$

$$= e^{-m} \cdot e^m = 1$$

i.e., எல்லா நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் $= 1$ எனத் தெரிகிறது.

3.2-3 பாய்சான் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் :

கூட்டுச்சராசரி, $\bar{X} = E(X)$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x \cdot e^{-m} \cdot m^{+x}}{\angle x}$$

$$i.e., \ \mu_1' = e^{-m} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x \cdot m^{+x}}{\angle x}$$

$$= e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{\angle x - 1}$$

$$= e^{-m} \cdot m \sum_{x=1}^{\infty} \left[\frac{m^{x-1}}{\angle x - 1} \right]$$

$$= e^{-m} \cdot m \, [e^m]$$

$$= m$$

இதேபோன்று, $\mu_2' = E(X^2)$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} [x + x(x-1)] \; \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left[\frac{x \cdot e^{-m} \cdot m^x}{\angle x} \right]$$

$$+ e^{-m} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \left[\frac{x(x-1) \, m^x}{\angle x} \right]$$

$$= m + e^{-m} \cdot m^2 \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^{x-2}}{\angle x - 2}$$

$$= m + e^{-m} \cdot m^2 \cdot e^m$$

$$= m + m^2$$

$$\therefore \quad \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$= m + m^2 - (m)^2 = m$$

$$i.e., \sigma^2 = m$$

$$\therefore \quad \text{திட்ட விலக்கம்}, \sigma = + \sqrt{m} .$$

இதே முறையில் $\mu'_3 = m^3 + 3m^2 + m$ என்றும்,

$$\mu_4' = m^4 + 6m^3 + 7m^2 + m$$

என்றும் நிறுவலாம். இவற்றிலிருந்து,

$$\mu_3 = m, \quad \mu_4 = m + 3m^2$$ என்று

கிடைக்கும்.

$$\text{மேலும்}, \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{m^2}{m^3} = \left(\frac{1}{m}\right) \text{ என்றும்}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3m^2 + m}{m^2} = \left(3 + \frac{1}{m}\right)$$

என்றும் தெரிகிறது.

இம் முடிவுகளிலிருந்து, m-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாக இருந்தால், பாய்சான் பரவலின் கோட்டம் மிக அதிகமாக இருக்கும் என்றும், அதன் மதிப்பு மிக அதிகரிக்குமானால் β_2-ன் மதிப்பு 3-ஐ அணுகும் என்றும் தெரிகிறது m-ன் மதிப்பு எண்ணிலடங்காது அதிகரிக்கும் போது இப்பரவலின் எல்லையை ஒரு இயல் நிலைப் பரவல் என்று கூறுகிறோம். μ_3-ன் மதிப்பும் m-க்குச் சமம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

குறிப்பு (*i*) ஈருறுப்புப் பரவலில் கண்ட முடிவுகளில் $p = \frac{m}{n}$ என்று பிரதியிட்டு, பின் n-ஐ முடிவிலிக்கு அணுகச் செய்வதன் மூலமும் மேலே நிறுவிய முடிவுகளைப் பெற முடியும்.

(*ii*) பாய்சான் பரவலில், கூட்டுச் சராசரி, மாறுபாடு இவை இரண்டின் மதிப்புகளும் m-க்குச் சமமாக உள்ளன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எனினும், வாய்ப்பு மாறி X-ஐ அளவிட ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட அலகைப் பயன்படுத்துவோமானால், கூட்டுச் சராசரியை m அலகுகள் என்றும், மாறுபாட்டை m சதுர அலகுகள் என்றும் குறிப்பிட வேண்டும்.

(*iii*) இங்கு m என்பது, பாய்சான் பரவலின் துணையலகு எனப்படும் X எனும் மாறியின் பரவல் ஒரு பாய்சான் பரவல் எனில், அம்மாறியை பாய்சான் மாறி என்றும் கூறுவர்.

3.2-4 விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு : $M(t)$ என்பது ஆதியை மையமாகக் கொண்ட, பாய்சான் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு எனில்,

$$M(t) = E[e^{tr}]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$$

$$= e^{-n} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(m e^t)^x}{\angle x}$$

$$= e^{-m} \cdot e^{m \cdot e^t} = e^{m}(e^t - 1)$$

இச்சார்பிலிருந்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை பின் வருமாறு காணலாம்.

$$\mu_1' = \left\{\frac{d}{dt}[M(t)]\right\}_{t=0}$$

$$= [e^{m\ (et-1} \cdot m e^t]_{t=0}$$

$$= m$$

$$\mu_2' = \left\{\frac{d^2}{dt^2}[M(t)]\right\}_{t=0}$$

$$= \left\{ e^{m(e^t-1)} \cdot m(e^t) + (m e^t) \cdot [e^{m(e^t-1)} \cdot m e^t]\right\}_{t=0}$$

$$= m + m^2$$

இதேபோன்று ஏனைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் எளிதில் கணக்கிடலாம்.

3.2-5 பாய்சான் பரவலின் குவிவுகள் : இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, $\mu_1' = m$ என்று கண்டோம். எனவே m-ஐ மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பை $M\mu_1'(t)$ என்று குறிப்பிட்டால்;

$$M\mu_1'(t) = E[e^{t(x-m)}]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left[e^{t(x-m)} \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x} \right]$$

$$= e^{-m(1+t)} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(m \cdot e^t)^x}{\angle x}$$

$$= e^{-m(1+t)} \cdot e^{(m \cdot e^t)}$$

$$= e^{m[e^t - 1 - t]} = e^{m\left[\frac{t^2}{\angle 2} + \frac{t^3}{\angle 3} + \cdots\cdots\right]}$$

$\therefore$ பாய்சான் பரவலின் குவிவுச் சார்பு $k(t)$-ன் மதிப்பு பின்வருமாறு:

$$k(t) = \log m\mu'_{,}(t)$$

$$= m.\left(\frac{t^2}{\angle 2} + \frac{t^3}{\angle 3} + \cdots\cdots\cdots\right)$$

ஆகையால், இப்பரவலின் r-ஆவது குவிவை k_r எனக் குறிப்பிட்டால்,

$k_r = k(t)$-ன் விரிவிலுள்ள $\frac{t^r}{\angle r}$-ன் குணகம்.

$i.e., k_r = m; \quad r = 2, 3, 4, \ldots\ldots$

இதிலிருந்து r-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், k_r-ன் மதிப்பு நிலையானது எனத் தெரிகிறது. அதாவது பாய்சான் பரவலில் எல்லா குவிவுகளும் m-க்குச் சமம் என்று அறிகிறோம். இது பாய்சான் பரவலின் ஒரு சிறப்புப் பண்பாகும்.

(இங்கு $k_1 = \mu_1' = m$ என்பதையும் அறியவும்)

3.2.6 பாய்சான் பரவலின் முகடு காணுதல்: இப்பரவலில் x வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(x) = \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$ என்றுள்ளது. எனவே r வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(r-1)$ வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை விட அதிகமாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கவேண்டுமாயின்,

$$\frac{e^{-m}\, m^r}{\angle r} \geq \frac{e^{-m} \cdot m^{r-1}}{\angle r-1}$$ என்பது உண்மையாகும்.

$$i.e., \quad \frac{m^r}{m^{r-1}} \geq \frac{\angle r}{\angle r-1}$$

$$i.e., \quad m \geq r \ldots\ldots (1)$$

இதே போன்று, r வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $(r+1)$ வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை விட அதிகமாகவோ அல்லது சமமாக இருக்க வேண்டுமாயின்,

$m \leq r+1 \ldots\ldots (2)$ என்பது உண்மையாகும்.

ஆகையால் (1), (2)-லிருந்து,

$m-1 \leq r \leq m$ என்று கிடைக்கும்.

(i) இங்கு முதலில் m ஒரு மிகை முழு எண் எனக் கொள்வோம். எனவே $r = m-1$, $r = m$ என்றிருந்தால், அவற்றிற்கொப்ப நிகழ் தகவுகள் $P(m-1)$-ம், $P(m)$-ம் சமமாக இருக்கும். r-ன் ஏனைய மதிப்புகளுக்கான நிகழ்தகவுகள் இச்சம மதிப்பை விட குறைவாக இருக்கும். ஆகையால் $r=m-1$, $r=m$ என்பன பாய்சான் பரவலின் முகடுகளாகும். இரண்டு முகடுகள் இருக்கும் போது அவற்றின் சராசரி மதிப்பை (இங்கு $m-1/2$) முகடாகக் கொள்வது வழக்கம்.

(ii) m ஒரு மிகை முழு எண்ணாக இராவிடில் $(m-1, m)$ என்ற வீச்சில் உள்ள முழு எண்ணை, பரவலின் முகடாக எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம்.

3.2-7. பாய்சான் பரவலின் சிறப்புப் பண்புதேற்றம்:

X, Y என்ற இரண்டு தனித்தனி புள்ளியியல் மாறிகளின் பாய்சான் பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே m, m' என்றால், அவற்றின் கூட்டுத்தொகை $(X+Y)$-ன் பரவலும் ஒரு பாய்சான் பரவலாக இருக்கும். மேலும் அதன் கூட்டுச் சராசரி $(m+m')$ என்று இருக்கும்.

[இக் கூற்றை பின்வருமாறும் கொடுக்கலாம்: m, m'-ஐ துணை அலகுகளாக உடைய இரண்டு தனித்தனி பாய்சான் மாறிகளின் கூட்டுத்தொகை, $(m+m'')$-ஐ துணை அலகாக உடைய ஒரு பாய்சான் மாறியாக இருக்கும்.]

நிரூபணம் : $M_x(t)$, $M_y(t)$ என்பன X, Y என்ற பாய்சான் மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்புகள் என்க. $X+Y=Z$ எனில்,

$$M_z(t) = M_{x+y}(t)$$
$$= E\left[e^{t(x+y)}\right]$$
$$= E\left[e^{tx} \cdot e^{ty}\right]$$
$$= E(e^{tx}) \cdot E(e^{ty}) \text{ (} X, Y \text{ தனித்தனி மாறிகளாதலால்)}$$
$$= e^{m(e^t-1)} \cdot e^{m'(e^t-1)} \text{ (அதாவது சார்பிலாதன)}$$
$$= e^{m(e^t-1) + m'(e^t-1)}$$

i.e., $M_{x+y}(t) = e^{(m+m')(e^t-1)}$

எனவே $(X+Y)$-ன் பரவல் $(m+m')$-ஐ துணை அலகாக உடைய பாய்சான் பரவல் என்று தெரிகிறது.

வேறு சில தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளின் பரவல்கள்

3.3. ஒரே சீரான (அல்லது செவ்வகப்) பரவல் (Uniform or Rectangular Distribution):

இங்கு புள்ளியியல் மாறி X ஏற்கும் $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ என்ற n மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒப்ப; நிகழ்தகவின் மதிப்பு ஒரே மாதிரியாக $\frac{1}{n}$ என்றிருந்தால், X-ன் பரவல் சீரானது என்கிறோம். எனவே நிகழ்தகவுச் சார்பு, $P(x)$-ன் மதிப்பு பின்வருமாறு அமையும்.

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் நிகழ்ச்சி, அல்லது பகடையை உருட்டும் நிகழ்ச்சி முதலியன இத்தகைய பரவலை உருவாக்கும்.

3.4. பெருக்குப் பரவல் (Geometric Distribution)

3.4.1 வரையறை : பெர்னெளவ்லி முயற்சிகளின்போது ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவை p என்க. மேலும் முதல் வெற்றி கிடைப்பதற்குமுன், அந்நிகழ்ச்சி x தடவைகள் தோல்வி அடைவதாகக் கொள்வோம். எனவே அந்நிகழ்ச்சிக்கு முதல் வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(q^x \cdot p)$, $(q = 1 - p)$ என்று கிடைக்கும். இத்தகைய நிகழ்தகவுகளுக்கு ஒப்ப அமையும் புள்ளியியல் மாறி X ஒரு பெருக்குப் பரவலை உருவாக்குவதாகக் கூறுகிறோம்.

இங்கு $P(x) = q^x \cdot p$; $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ முடிவிலிவரை.

$$\therefore \sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (q^x \cdot p)$$

$$= p(1 + q + q^2 + \cdots \to \infty)$$

$$= p(1 - q)^{-1}$$

$$= \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1 \quad (\because \; p + q = 1)$$

3.4-2. விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் : ஆதியைப் பொறுத்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு,

$$M(t) = E(e^{tx})$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot q^x \cdot p$$

$$i.e., \; M(t) = p \sum_{x=0}^{\infty} (e^t \cdot q)^x$$

$$= p \cdot \frac{1}{(1 - qe^t)}$$

இச்சார்பிலிருந்து பல்வேறு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காணலாம்.

$$\therefore \mu_1' = \left\{ \frac{d}{dt} [M(t)] \right\}_{t=0}$$

$$= \left[p \cdot \frac{(-1)}{(1-qe^t)^2} \cdot (-qe^t)\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{pqe^t}{(1-qe^t)^2}\right]_{t=0}$$

$$= \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$$

111rly $\mu_2' = \left\{\frac{d^2}{dt^2}\,[\,M(t)\,]\right\}_{t=0}$

$$= pq\left[\frac{(e^t)}{(1-qe^t)^2} + e^t \cdot \frac{(-2)}{(1-qe^t)^3} \cdot (-qe^t)\right]_{t=0}$$

$$= pq\left[\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{2q}{(1-q)^3}\right]$$

$$= pq\left[\frac{1}{p^2} + \frac{2q}{p^3}\right]$$

$$= \frac{q}{p} + 2\frac{q^2}{p^2}$$

எனவே $\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$$= \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} = \frac{pq + q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

3·5 குறை ஈருறுப்புப் பரவல் (Negative Binomial Distribution):

3·5-1 பாஸ்கல் பரவல்; இங்கு ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான எண்ணிலடங்கா பெர்னௌலி முயற்சிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இவற்றுள் $(k+x)$ முயற்சிகள் எடுத்துக்கொண்டால்

இந் நிகழ்ச்சிக்கு k வெற்றிகள் கிடைக்கும் என்க. அதாவது முதலில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் $(k+x-1)$ முயற்சிகளில் $(k-1)$ வெற்றிகளும், $(k+x)$ ஆவது முயற்சியில் ஒரு வெற்றியும் கிடைக்கும் என்று பொருளாகும். இவ்வாறு k வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ் தகவு $P(x)$ எனில், பின்

$$P(x) = {}^{x+k-1}c_{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{x} \cdot p; \ (p+q=1)$$

$$= {}^{x+k-1}c_{k-1} \cdot p^{k} \cdot q^{x}$$

$$= {}^{x+k-1}c_{x} \cdot p^{k} \cdot q^{x}$$

இங்கு $x=0, 1, 2, \ldots\ldots$ முடிவிலிவரை; $k>0$ என்று அறியவும்.

$$\therefore \sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} {}^{x+k-1}c_{x} \cdot p^{k} \cdot q^{x}$$

$$= p^{k} \sum_{x=0}^{\infty} {}^{x+k-1}c_{x} \cdot q^{x}$$

$$= p^{k} \cdot (1-q)^{-k}$$

$$= p^{k} \cdot p^{-k} \quad = p^{0} = 1$$

இப்பொழுது, $${}^{k+x-1}c_{x} = \frac{(k+x-1)\,(k+x-2)\ldots\ldots\ldots k}{\angle x}$$

ஆனால், $${}^{-k}c_{x} = \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-x+1)}{\angle x}$$

$$= \frac{(-1)^{x} \cdot k \cdot (k+1)\ldots(k+x-1)}{\angle x}$$

i.e., $${}^{-k}c_{x} = (-1)^{x} \cdot {}^{k+x-1}c_{x}$$

or $${}^{k+x-1}c_{x} = (-1)^{x} \cdot {}^{-k}c_{x}$$ என்றும் எழுதலாம்.

எனவே, $p(x) = {}^{-k}c_x \cdot p^k \cdot (-q)^x$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். இங்கு $x=0, 1, 2, \ldots\ldots$ முடிவிலிவரை.

இந்த அமைப்பில் நிகழ் தகவுச் சார்பு $p(x)$-ஐ எடுத்துக் கொள்வோமானால், வாய்ப்பு மாறி x-ன் பரவலை "பாஸ்கல் பரவல்" என்கிறோம். இங்கு p, k என்ற இரண்டு துணை அலகுகள் உள்ளன, இதில் $k=1$ என்றிட, இப்பரவல் பெருக்குப் பரவலாக மாறும்.

3.5-2 குறை ஈருறுப்புப் பரவல் : பாஸ்கல் பரவலில் K என்பது ஒரு மிகை முழு எண் என்று எடுத்துள்ளோம். ஆனால் K முழு எண்ணாயிராமல் ஏதேனும் ஒருமிகை எண்ணாக இருந்தபோதிலும் இப்பரவலுக்கும் பொருள் உண்டு. இவ்வாறு நிகழ்தகவுச் சார்பு,

$P(x) = {}^{-k}c_x \cdot p^k \quad (-q)^x, \quad K \geq 0, x = 0, \ 1, 2, \ 3, \ldots\ldots$ என்றிருப்பின், இப்பரவலை "குறை ஈருறுப்புப் பரவல்" என்று அழைப்பதுண்டு. இது ஈருறுப்புப் பரவலைப் போன்ற பண்புகளை உடையது என்பது பின்வரும் முடிவுகளிலிருந்து விளங்கும்.

$P(x)$—ல் $P = \dfrac{1}{Q}, q = \dfrac{P}{Q}$ என்றிடுவோமானால்,

$$P(x) = {}^{-k}c_x \cdot Q^{-k} \left(-\frac{P}{Q}\right)^x, \ x = 0, 1, 2 \ldots \text{ முடிவிலிவரை}$$

$$= {}^{-k}c_x \cdot Q^{-(K+x)} (-P)^x$$

இம்மதிப்பு, $(Q-P)^{-k}$-ன் விரிவிலுள்ள பொது உறுப்பு என்று தெரியும்.

மேலும் $Q-P = Q - Qq$
$= Q(1-q) = Qp = 1$ என்று தெரிகிறது.

அடுத்து, $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} {}^{-k}c^x \, Q^{-(K+x)} (-P)^x$

$= (Q-P)^{-k} = 1$ என்று கிடைக்கும்.

3·5-3 குறை ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு : $M(t)$ என்பது ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு எனில்,

$$M(t) = E(e^{tx})$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} P(x)\, e^{tx}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} {}^{-k}c_x\, Q^{-k} \left(\frac{-P}{Q}\right)^x e^{tx}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} {}^{-k}c_x\, Q^{-k} \left(\frac{-Pe^t}{Q}\right)^x$$

$$= (Q - P\cdot e^t)^{-k}$$

$$\therefore \quad \mu'_1 = \left\{\frac{d}{dt}[M(t)]\right\}_{t=0}$$

$$= [(-K)(Q - P\cdot e^t)^{-(K+1)}(-P\cdot e^t)]_{t=0}$$

$$= k\cdot p$$

$$\mu'_2 = \left\{\frac{d^2}{dt^2}[M(t)]\right\}_{t=0}$$

$$= KP\,[e^t(Q - Pe^t)^{-(K+1)} + e^t(-K-1)$$

$$(Q - Pe^t)^{-(K+2)}(-Pe^t)]_{t=0}$$

$$= KP\,[(Q-P)^{-(K+1)}$$

$$+ (K+1)P(Q-P)^{-(K+2)}]$$

$$= KP[1 + (K+1)P] = KP[(P+1) + KP]$$

$$= KP(Q + KP)$$

$$\therefore \ \text{Var}(X) = \mu_2$$
$$= \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$
$$= KP[1 + (K+1)P] - (KP)^2$$
$$= KP(1+P) = KPQ \quad (\because \ Q - P = 1)$$

இவ்வாறு, குறை ஈருறுப்புப் பரவலில் $\mu_2 > \mu'_1$ என்று அறிகிறோம்.

ஆனால் ஈருறுப்புப் பரவலில் $\mu_2 < \mu'_1$ என்று தெரியும். இந்த வேறுபாட்டைத் தவிர, ஏனைய முடிவுகள் சிலவற்றில், இவ்விரண்டு பரவல்களும் ஒத்த அமைப்பு உடையன என்பது, μ'_1 μ'_2-ன் மதிப்புகளிலிருந்து நன்கு விளங்கும்.

குறை ஈருப்புப்பரவல், ஈருறுப்பு இனத்தொகுதியின் நேர்மாறு கூறெடுத்தல் முறைகளில் மிகவும் பயன்படுகிறது. மேலும் பாய்சான் பரவலின் நிறையிட்ட சராசரியாகவும் இப்பரவல் அமைந்துள்ளது.

உடற்கூறு சம்பந்தமான நிகழ்ச்சிகளில் பல இப்பரவலின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளன என்று கண்டுள்ளனர்.

3·5-4 பாய்சான் பரவலை குறை ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை மதிப்பு என பின்வருமாறு நிறுவலாம் : $KP = m$ என்ற அளவிடக்கூடிய எண்ணாக இருக்குமாறு, P-ன் மதிப்பு பூஜ்யத்தையும், K-ன் மதிப்பு முடிவிலியையும் அணுகுவதாகக் கொள்வோம் $P \to 0, K \to \infty$ என்ற நிலையில், குறை ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு $P(X)$-ஐ அணுகுவதாகக் கொள்வோம்.

ஆகையால்

$$P(X) = \underset{\substack{P \to 0 \\ K \to \infty}}{Lt} \left[(1+P)^{-k} \frac{(K+x-1)(K+x-2)\ldots K}{\angle x} \left(\frac{P}{1+P}\right)^x \right]$$

$$= \underset{K \to \infty}{Lt} \left[\left(1 + \frac{m}{K}\right)^{-K} \frac{1}{\angle x} \left(1 + \frac{x-1}{K}\right)\left(1 + \frac{x-2}{K}\right) \ldots 1 \right.$$
$$\left. \times \ m^x \left(1 + \frac{m}{K}\right)^{-x} \right]$$

$$= \frac{1}{Z^x}\left[\underset{K\to\infty}{Lt}\left\{\left(1+\frac{m}{K}\right)^{K/m}\right\}^{-m}\right]m^x$$

$$= \frac{1}{Z^x}\, e^{-m}\cdot m^x$$

இச்சார்பு பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு என்று தெரியும்.

3·6 உயர்பெருக்குப் பரவல் (Hypergeometric Distribution)

3·6-1. வரையறை: ஒரு பரிசோதனையின் போது ஒவ்வொரு முயற்சியிலும், குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு நிலையானதாக இருந்தால்தான் அங்கு ஈருறுப்புப் பரவலை பயன் படுத்த முடியும்: ஆனால் நிகழ்தகவின் மதிப்பு ஒவ்வொரு முறையும் மாறிக்கொண்டே இருக்குமானால், அத்தகைய பரிசோதனைகளில் இங்கு பார்க்க இருக்கும் உயர் பெருக்குப் பரவல்தான் பயன்படும்.

உதாரணமாக ஒரு பையில் m வெள்ளைப் பந்துகளும், n சிவப்புப் பந்துகளும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்பையி லிருந்து, ஒவ்வொரு முறையும் எடுக்கும் பந்தை மீண்டும் அப்பையில் வைக்காமல், ஒவ்வொன்றாக r பந்துகள் எடுத்தால், அவற்றுள் x வெள்ளைப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

$$P(x) = \frac{{}^mC_x \cdot {}^nC_{r-x}}{{}^{m+n}C_x} \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

இங்கு $r \le m, n$ என்றும், $x=0, 1, 2, 3 \ldots r$ என்றும் இருக்கும்.

$$\text{ஆகையால், } \sum_{x=0}^{r} (Px) = \sum_{x=0}^{r}\left(\frac{{}^mC_x \cdot {}^nC_{r-x}}{{}^{m+n}C_r}\right)$$

ஆனால் $(1+Z)^m \cdot (1+Z)^n \equiv (1+Z)^{m+n}$ எனும் முற்றொருமையிலிருந்து Z^r-ன் குணங்களை சமப்படுத்த,

$$\sum_{x=0}^{r} \left({}^mC_x \cdot {}^nC_{r-x}\right) = {}^{m+n}C_r \text{ என்று பெறலாம்.}$$

r

$$\therefore \sum_{x=0}^{r} P(x) = \frac{{}^{m+n}C_r}{{}^{m+n}C_r} = 1$$

3 6-2 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் காணுதல்:

$$\mu'_1 = E(x) = \sum_{x=0}^{r} x\,P(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{r} x \left[\frac{{}^{m}C_x \cdot {}^{n}C_{r-x}}{{}^{m+n}C_r}\right]$$

$$= \frac{m}{{}^{m+n}C_r} \sum_{x=1}^{r} {}^{m-1}C_{x-1} \cdot {}^{n}C_{r-x}$$

$$= \frac{m}{{}^{m+n}C_r} \sum_{y=0}^{r-1} {}^{m-1}C_y \cdot {}^{n}C_{r-y-1};\quad x - 1 = y \text{ என்றும்}$$

$$= \frac{m}{{}^{m+n}C_r}\ {}^{m-1+n}C_{y-1}$$

$$= \frac{m \cdot r}{(m+n)}$$

$$\mu'_2 = E\ (x^2) = \sum_{x=0}^{r} x^2 \cdot p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{r} [x \cdot (x-1) + x]\, p(x)$$

$$= \sum_{0=x}^{r} x\,(x-1) \cdot p(x) \cdot + \sum_{x=0}^{r} x \cdot p(x)$$

இப்பொழுது, $\sum_{x=0}^{r} x(x-1)\, p(x) = \sum_{x=0}^{r} x(x-1) \cdot \frac{{}^{m}c_x \cdot {}^{n}c_{r-x}}{{}^{m+n}c_r}$

$$= \frac{m(m-1)}{{}^{m+n}c_r} \sum_{x=2}^{r} {}^{m-2}c_{x-2} \cdot {}^{n}c_{r-x}$$

$$= \frac{m(n-1)}{{}^{m+n}c_r} \cdot {}^{m+n-2}c_{r-2}$$

$$= \frac{m(m-1) \cdot r(r-1)}{(m+m)+(m+n-1)}$$

$$\therefore \quad \mu'_2 = \frac{m(m-1)\, r(r-1)}{(m+n)(m+n-1)} + \frac{mr}{(m+n)}$$

இதே போன்று ஏனைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் கணக்கிடலாம்.

மேலும் $\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$

$$= \frac{m(m-1)\, r(r-1)}{(m+n)(m+n-1)} + \frac{mr}{(m+n)} - \frac{mr}{(m+n)^2}$$

$$= \frac{m\, n\, r\, (m+n-r)}{(m+n)^2\, (m+n-1)}$$

3·6-3 ஈருறுப்புப் பரவலை உயர்பெருக்குப் பரவலின் எல்லை மதிப்பு என நிறுவலாம்: உயர்பெருக்குப் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பில், $\frac{m}{m+n} = p;\ m+n = N$ என்று பிரதியிட,

$$p(x) = \frac{{}^{m}c_x \cdot {}^{m}c_{r-x}}{{}^{N}c_r} \text{ என்றுகும்.}$$

$$i.e. \; P(x) = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-x+1)}{\angle x}\right] \times$$

$$\left[\frac{(N-m)(N-m-1)\ldots\ldots(N-m-r+x+1)}{\angle r-x}\right] \times$$

$$\left[\frac{\angle r}{N(N-1)\ldots\ldots(N-r+1)}\right]$$

$$= \frac{\angle r}{\angle x \cdot \angle r-z} \cdot \frac{\left(\frac{m}{N}\right)\left(\frac{m}{N}-\frac{1}{N}\right)\ldots\ldots\left(\frac{m}{N}-\frac{x-1}{N}\right)\cdot}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\ldots\ldots\ldots}$$

$$\frac{\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m+1}{N}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{m}{N}-\frac{r-x-1}{N}\right)}{\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{r-1}{N}\right)}$$

$\frac{m}{N} = p$ என்ற மாருத அளவிடக்கூடிய எண்ணுக இருக்குமாறு, N முடிவிலியை அணுகும் எனக்கொள்வோம். அதாவது $N \to \infty$ என்ருல், $\frac{m}{N} \to p$ எனும் ஒரு முடிவுடைய எண்.

$$\therefore \; \underset{N \to \infty}{Lt} P(x) = \frac{\angle r}{\angle x \cdot \angle r-x} \cdot (p \cdot p \ldots\ldots\ldots\ldots \; x \text{ காரணிகள்})$$

$$[(1-p)(1-p)\ldots\ldots(r-x) \text{ காரணிகள்}.$$

$$i.e., \; P'(x) = \frac{\angle r}{\angle x \cdot \angle r-x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{r-x}$$

இவ்வாறு, r முயற்சிகளுள் ஏதேனும் x வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை $P'(x)$ எனும் சார்பு குறிக்கிறது என அறிகிரேம். எனவே $P'(x)$-ஐ நிகழ்தகவுச் சார்பாக உடைய பரவல் ஈருறுப்புப் பரவல்தான் என்று விளங்கும்.

3 7 பல்லுறுப்புப் பரவல் (Multinomial Distribution)

3·7-1 வரையறை : இப்பரவலை ஈருறுப்புப் பரவலின் பொது அமைப்பாகக் கூறலாம். இங்கு ஒரு பரிசோதனையை n தனித்தனி முயற்சிகளில் மீண்டும் மீண்டும் செய்வதாகக் கொள்வோம். குறிப்பிட்ட பரிசோதனையை E என்றும், அப்பரிசோதனையை செய்ய எடுத்துக் கொள்ளும் முயற்சிகளின் விளைவுகளை (அல்லது முடிவுகளை) $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots E_k$ என்றும், இவற்றிற்கான நிகழ் தகவுகளை முறையே $p_1, p_2, p_3 \ldots p_k$ என்றும் குறிப்பிடுவோம், மேலும் ஒவ்வொரு முயற்சியின் போதும், இவ்விளைவுகளும் ஏதேனும் ஒன்று கிடைத்தல் உறுதி எனக் கொள்வோமாயின்,

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$ என்று தெரியும்.

பரிசோதனையை செய்ய எடுத்துக்கொள்ளப்படும் n முயற்சிகளுள் E_i என்ற விளைவு n_i தடவைகள் கிடைக்கும் என்போம். அதாவது E_1 கிடைப்பது n_1 தடவைகள் என்றும், E_2 கிடைப்பது n_2 தடவைகள் என்றும் ; இதேபோன்று இன்ன பிறவும் நடைபெறும் என்று பொருளாகும். மேலும் இவை ஒரு குறுப்பிட்ட நிலையான வரிசைப்படி நிகழும் என்று எடுத்துக்கொண்டால், அதற்கான நிகழ்தகவு

$$p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \ldots\ldots p_k^{n_k}, (n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n)$$

என்று அறியலாம். ஆனல் இவ்விளைவுகள் எந்த வரிசையிலும் அமையலாம் என்று கொள்வோமாயின், n விளைவுகளுள், n_1 விளைவுகள் ஒருவகையாகவும், n_2 விளைவுகள் வேறு ஒரு வகையாகவும், இதேபோன்று இன்னபிற விளைவுகளும் வெவ்வேறு வகையாக இருப்பதால், எல்லா n விளைவுகளையும்

$$\frac{\angle n}{\angle n_1 \cdot \angle n_2 \ldots \angle n_k}$$ வெவ்வேறு வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

ஆகையால் தேவையான நிகழ்தகவின் மதிப்பு, $P(n_1, n_2 \ldots\ldots n_k)$

$$= \frac{\angle n}{\angle n_1 \cdot \angle n_2 \ldots\ldots \angle n_k} \cdot p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots\ldots p_k^{n_k}$$ என்ருகும்.

நிகழ்தகவின் இந்த மதிப்பு, $(p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_k)^n$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் விரிவிலுள்ள பொது உறுப்பு என்று தெரிகிறது. ஆகையால் இப்பரவலை "பல்லுறுப்புப் பரவல்" என்கிரேம்.

மேலும் இது $n_1, n_2, \ldots\ldots n_k$ என்ற பல மாறிகளின் பரவல் என்றும் தெரிகிறது. ஆனல் $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ என்றிருப்பதால், இந்த k மாறிகளுள், $(k-1)$ மாறிகள்தான் சார்பிலாதன என்று அறிகிறோம். இப்பரவல் இரண்டுவகைகளுக்கு மேற்பட்ட பொருள்களையுடைய ஒரு முழுமைத் தொகுதியின், எடுக்கும் பொருளை மீண்டும் வைத்து கூறு எடுத்தலில் மிகவும் பயன்படுகிறது.

$$\text{எல்லா நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல்} = \Sigma P(n_1, n_2, \ldots\ldots n_k)$$

$$= \Sigma \left[\frac{\angle n}{\angle n_1 \ \angle n_2 \ldots\ldots \angle n_k} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \ldots \cdot p_k^{n_k} \right]$$

$$= (p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_k)^n$$

$$\left[\because \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \right]$$

$$= 1$$

3.7-2 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் :

$$E(n_i) = \Sigma n_i P(n_1, n_2, \ldots\ldots n_k)$$

$$= p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \Sigma \left[\frac{\angle n}{\angle n_1 \cdot \angle n_2 \ldots\ldots \angle n_k} \right] p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \ldots\ldots p_k^{n_k} \right\}$$

$$= p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \{ (p_1 + p_2 + \ldots\ldots p_k)^n \}$$

$$= n \cdot p_i (p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_k)^{n-1}$$

$$= np_i$$

$$E(n_i n_j) = \Sigma n_i n_j P(n_1, n_2, \ldots\ldots n_k)$$

$$= p_j \frac{\partial}{\partial p_j} [\, \Sigma\, n_i P(n_1, n_2, \ldots\ldots n_k) \,]$$

$$= p_j \frac{\partial}{\partial p_j} [\, n\, p_i (p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_k)^{n-1} \,]$$

$$= n\, p_i \cdot p_j \cdot (n-1)(p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_k)^{n-2}$$

$$= n(n-1)\, p_i \cdot p_j \,;\; i \neq j$$

$$E(n_i^2) = \Sigma\, n_i\, n_i\, P(n_1, n_2, \ldots\ldots n_k)$$

$$= p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \{\, \Sigma\, n_i \cdot P(n_1, n_2, \ldots\ldots n_k) \,\}$$

$$= p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{\, n\, p_i (p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_k)^{n-1} \,\right\}$$

$$= p_i \cdot n \cdot (p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_k)^{n-1} + p_i\, n p_i (n-1) (p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots + p_k)^{n-2}$$

$$= n\, p_i + n(n-1)\, p_i^2$$

இப்பொழுது, $\mathrm{Var}(n_i) = E(n_i^2) - [(E(n_i)]^2$

$$= n\, p_i + n(n-1)\, p_i^2 - (n\, p_i)^2$$

$$= n\, p_i (1 - p_i)$$

111^{rly} $\mathrm{cov}(u_i, n_j) = E(n_i\, n_j) - E(n_i) \cdot E(n_j)$

$$= n(n-1)\, p_i\, p_j - np_i \cdot np_j$$

$$= -\, np_i\, p_j$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் :

1. கல்லூரி மாணவர் ஒருவர் பட்டம் பெற்று வெற்றியடைவதற்கான வாய்ப்பு விகிதம் 0 · 4 என்றால், 5 மாணவர்களுள்

(i) ஒருவர் பட்டம் வாங்குவதற்குரிய,

(ii) ஒருவர் கூட பட்டம் வாங்காமலிருப்பதற்குரிய,

(iii) குறைந்தது ஒருவராகிலும் பட்டம் வாங்குவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடு.

நிகழ்தகவு, $p = 0 \cdot 4 = \frac{2}{5}$;

$$\therefore \quad q = 1 - p = \frac{3}{5}$$

மேலும், $n = 5$

ஒருவர் பட்டம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= P(X = 1)$

ஆனால் $P(X = x) = {}^{n}C_{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$

$$\therefore \quad P(X = 1) = {}^{5}C_{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{1} \left(\frac{3}{5}\right)^{4}$$

$= 0 \cdot 26$, தோராயமாக,

$$\text{111}^{ly}\ P(X = 0) = {}^{5}C_{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{0} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{5}$$

$= 0 \cdot 08$, தோராயமாக,

அதாவது ஒருவர் கூட பட்டம் வாங்காததன் நிகழ்தகவு $\Big\} = 0 \cdot 08$

குறைந்தது ஒருவராகிலும் பட்டம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = P(X \geq 1)$

ஆனால் $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$= 1 - 0 \cdot 08$

$= \mathbf{0 \cdot 92}$.

2. இரண்டு ஒரே மாதிரியான பகடைகளை ஆறு முறைகள் உருட்டி விளையாடும் போது கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை 9 என நான்கு முறைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

ஒவ்வொரு பகடையிலும் முதல் ஆறு இயற்கை எண்கள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். எனவே ஒரு பகடையை உருட்டும் போது ஏதேனும் ஒரு எண் கிடைப்பதற்கு 6 வழிகள் உள்ளன. மேலும் இரண்டு பகடைகளையும் ஒரே சமயத்தில் உருட்டும் போது, ஏதேனும் இரண்டு எண்கள் கிடைப்பதற்கான மொத்த வழிகள், $6 \times 6 = 36$ உள்ளன.

இவற்றுள், கிடைக்கும் இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 9 என்று அமையுமாறு,

(6, 3), (5, 4), (4, 5), (3, 6) என்ற 4 வழிகள் உள்ளன.

$$\left.\begin{array}{r}\text{2 எண்களின் கூட்டுத்தொகை 9 என} \\ \text{ஒரு முறை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு}\end{array}\right\} = \frac{4}{36}$$

$$i.e., \; p = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \; q = 1 - p = \frac{8}{9}$$

மேலும் $n = 6$

இங்கு $P(X = x) = 6_{C_x} \; p^x \cdot q^{6-x}$ என்றாகும்.

$$\therefore \; P(X = 4) = 6_{C_4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

$$= \frac{960}{531441}$$

i.e., 4 முறைகள் கூட்டுத் தொகை 9 கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு $= \frac{960}{531441}$

3. ஒரு தொழிற்சாலையில் நாள் ஒன்றுக்கு 500 சைக்கிள்கள் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. அவற்றுள் சராசரி 10 சைக்கிள்களில் ஏதேனும் ஒரு குறை இருப்பதாக ஒதுக்கப்படுகின்றன. அத்தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் சைக்கிள்களைக் குறிக்கும் ஈருறுப்புப் பரவலைக் காண்க. ஒரு நாளில் அதிக அளவு எத்தனை சைக்கிள்கள் ஒதுக்கப்படும் என்று எதிர் பார்க்கலாம்.

இங்கு $n = 500$

X-என்ற மாறி குறையுடைய சைக்கிள்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும்

$\therefore \; \bar{X} = 10$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேவையான நிகழ்தகவு p எனில், $np = 10$ என்றுள்ளது.

9

$(\therefore \quad \bar{X} = np)$

$$i.e., \; p = \frac{10}{n} = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$$

$$\therefore \quad q = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

இதிலிருந்து, 0, 1, 2, 3. ...... சைக்கிள்கள் ஒவ்வொரு நாளும் ஒதுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவுகள், முறையே $\left[\frac{49}{50} + \frac{1}{50}\right]^{500}$ என்ற கோவையின் விரிவிலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புகளாகும். எனவே இப்பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு $P(x)$ எனில்,

$$P(x) = 500\, C_x \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^x \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{500-x}$$ என்று கிடைக்கும்.

இப்பரவலின் முகடு

இங்கு, $(n+1)\,p = 501 \times \frac{1}{50} = \left(10 + \frac{1}{50}\right)$

$\therefore$ முகடு, $x = 10$ என்பதாம்

அதாவது, ஒரு நாளில் அதிக அளவு ஒதுக்கப்படும் குறையுடைய சைக்கிள்களின் எண்ணிக்கை. $\} = 10$

4. சமச்சீரான நாணயம் ஒன்றை ஒரு முறை சுண்டும்போது பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$ என்றால், 99 முறைகள் சுண்டும் போது அதிக அளவு எத்தனை பூக்கள் கிடைக்கும் ?

இங்கு $p = \frac{5}{3}, \; q = \frac{2}{5}, \; n = 99$

$\therefore \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)^{99}$ -ன் விரிவிலுள்ள உறுப்புகள் முறையே 0, 1, 2, 3, ... பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் குறிக்கும்.

மேலும், $(n + 1)\,p = 100 \times \frac{3}{5} = 60$

இம்மதிப்பு பரவலின் முகட்டைக் குறிக்கும்.

அதாவது, அதிக அளவு கிடைக்கும் பூக்களின் எண்ணிக்கை $= 60$.

5. ஒரு கல்லூரி விளையாட்டுப் போட்டியில் நடந்த 10 தனித்தனி நிகழ்ச்சிகளில் 80 மாணவர்கள் கலந்து கொண்டனர். ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியிலும் வெற்றியடைந்தவர்களின் விவரம் பின் வருமாறு

நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	கூடுதல்
வெற்றி அடைந்தவர்களின் எண்ணிக்கை	8	18	24	17	9	3	1	0	0	0	0	80

இந்த விவரத்திற்குரிய ஈருறுப்புப் பரவலைக் காண்க. மேலும் நிகழ்வெண்களின் தோராய மதிப்புகளையும் கணக்கிடுக.

இங்கு நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையை x_i என்றும், வெற்றி அடைந்தவர்களின் எண்ணிக்கையை p_i என்றும் குறிப்பிடுவோம். இக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி அருகிலுள்ள பட்டியலைத் தயாரிப்போம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது :

$$n = 10,\ N = \sum_{i=0}^{10} p_i = 80$$

$\therefore$ கூட்டுச் சராசரி, $\bar{X} = \dfrac{\Sigma\, x_i\, p_i}{\Sigma\, p_i}$

$$= \frac{174}{80}$$

இங்கு வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p எனில், பின்

$$\bar{X} = np = \frac{174}{80} \text{ என்றாகும்.}$$

$$\therefore \quad p = \frac{174}{800} = 0{\cdot}22, \text{ தோராயமாக.}$$

$$q = 1 - p = 0{\cdot}78.$$

எனவே, தேவையான ஈருறுப்புக் கோவை,

$80\,[0{\cdot}78 + 0{\cdot}22]^{10}$ என்பதாகும்.

x_i	p_i	$x_i\,p_i$
0	8	0
1	18	18
2	24	48
3	17	51
4	9	36
5	3	15
6	1	6
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0
கூடுதல்	80	174

இதன் விரிவிலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புகள்,

முறையே 0, 1, 2, 3, ... 10 நிகழ்ச்சிகளில் வெற்றியடைந்தோரின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பனவாம். இதிலிருந்து

தயாரிக்கப்பட்ட பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து, நிகழ்வெண்களின் மதிப்புகளை ஒப்பிடலாம்.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	கூடுதல்
p_i-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு	8	18	24	17	9	3	1	0	0	0	0	80
p_i-ன் அறிமுறை மதிப்பு	7	19	24	18	8	3	1	0	0	0	0	80

[குறிப்பு: $80(\cdot78 + \cdot22)^{10} = 6{\cdot}9 + 19{\cdot}2 + 24 + 17{\cdot}9 + 8{\cdot}4 + 2{\cdot}9 + 0{\cdot}8 + 0{\cdot}1 + 0 + 0 + 0$
$= 7 + 19 + 24 + 18 + 8 + 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0$, தோராயமாக]

6. ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 4 என்றும், வேறுபாடு 3 என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் அப்பரவலைக் கண்டுபிடி.

ஈருறுப்புப் பரவலின் மொத்த முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை n என்க. மேலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவை p என்க.

பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $= 4$

i.e., $np = 4$

பரவலின் வேறுபாடு $= 3$

i.e., $npq = 3$

இப்பொழுது, $q = \dfrac{npq}{np} = \dfrac{3}{4}$

$$\therefore\ p = 1 - q = \frac{1}{4}$$

அடுத்து, $np = 4$

$$\therefore\ n = \frac{4}{p} = \frac{4}{(1/4)} = 16$$

என்வே, நிகழ்தகவுச் சார்பு, $p(x) = 16c_x \cdot (\frac{1}{4})^x \cdot (\frac{3}{4})^{16-x}$

7. வழக்கமான குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, ஈருறுப்புப் பரவலில், $\mu_{r+1} = pq\left[nr\,\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp}\right]$ என்ற தொடர்பு உண்மை என்று நிரூபி. இத் தொடர்பிலிருந்து, μ_2, μ_3-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

$$\mu_r = E[(x-np)^r]$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\left[(x-np)^r \cdot {}^n c_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}\right]$$

$$\therefore \frac{d\mu_r}{dp} = \sum_{x=0}\left[r \cdot (x-np)^{r-1} \cdot (-n) \cdot {}^n c_x \cdot p^x\, q^{n-x}\right]$$

$$+\sum_{x=0}^{n}(x-np)^r \cdot {}^n c_x \cdot \left[x \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x} + p^x \cdot (n-x) \cdot q^{n-x-1} \cdot (-1)\right]$$

$$= -nr\sum_{x=0}^{n}(x-np)^{r-1} \cdot {}^n c_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$+\frac{1}{pq}\sum_{x=0}^{n}(x-np)^r \cdot {}^n c_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}\,[qx-p(n-x)]$$

$$= -nr\,\mu_{r-1} + \frac{1}{pq}\sum_{x=0}^{n}(x-np)^r \cdot {}^n c_x \cdot p^x \cdot q^{n-x} \cdot n]\; [x(p+q) - pn]$$

$$i.e., \frac{d\mu_r}{dp} + nr \cdot \mu_{r-1} = \frac{1}{pq} \cdot \sum_{x=0}^{n} (x-np)^{r+1} \cdot {}^nc_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$i.e., pq\left[\frac{d\mu_r}{dp} + nr\, \mu_{r-1}\right] = \mu_{r+1}$$

இதில் $r=1$ என்றிட, $pq\left[\frac{d\mu_1}{ap} + n \cdot 1 \cdot \mu_0\right] = \mu_2$

$i.e., \mu_2 = pq\,[0 + n \cdot 1] = npq.$

$r=2$ என்றிட, $\mu_3 = pq\left[\frac{d\mu_2}{ap} + n \cdot 2 \cdot \mu_1\right]$

$$= pq\,[nq + np\,(-1) + 2\,n \cdot 0]$$

$$= n\,pq \cdot (q-p)$$

$r=3$ என்றிட, $\mu_4 = pq\left[\frac{d\mu_3}{dp} + n \cdot 3 \cdot \mu_2\right]$

$$= pq\,[nq\,(q-p) + np\,(q-p)\,(-1) + n\,pq\,(-1-1) + 3\,n\,(n\,pq)]$$

$$= npq\,[q\,(q-p)\,p\,(q-p) - 2\,pq + 3n\,pq]$$

$$= npq\,[(q-p)\,(q-p) - 2\,pq + 3n\,pq]$$

$$= npq\,[(q-p)^2 - 2\,pq] + 3\,n^2\,p^2\,q^2$$

$$= n\,pq\,[(q+p)^2 - 4\,pq - 2pq] + 3\,n^2\,p^2\,p^2$$

$$= npq\,[1-6\,pq] + 3\,n^2\,p^2\,q^2$$

8. X என்பது ஒரு ஈருறுப்பு மாறி என்றால்,

$\text{cov}\left(\frac{x}{n}, \frac{n-x}{n}\right) = \frac{-pq}{n}$ என்று நிறுவுக.

$\text{cov}\,(ax, by) = ab\,\text{cov}\,(x, y)$ என்று தெரியும்.

$$\therefore \operatorname{cov}\left(\frac{x}{n}, \frac{n-x}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \operatorname{cov}(x, n-x)$$

$$= \frac{1}{n^2} [E\{x(n-x)\} - E(x) \cdot E(n-x)]$$

$$= \frac{1}{n^2} [E(nx - x^2) - E(x) \cdot \{n - E(x)\}]$$

$$= \frac{1}{n^2} [n \cdot E(x) - E(x^2) - E(x)\{n - E(x)\}]$$

$$= \frac{1}{n^2} [n \cdot np - (n^2 p^2 + npq) - np(n - np)]$$

$$= \frac{1}{n^2} [-npq] = \frac{-pq}{n}$$

9. n அலகுள்ள ஈருறுப்புப் பரவலின், ஆதியை மையமாகக் கொண்ட, குவிவுச் சார்பு $k(t)$ எனில், பின்வரும் தொடர்பை நிறுவுக.

$$\frac{d}{dt}[k(t) = n\left[1 + e^{-(z+t)}\right]^{-1}; \; z = \log e\left(\frac{p}{q}\right).$$

ஈருறுப்புப் பரவலில், ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு, $M(t) = (q + pe^t)^n$ என்று தெரியும்.

$$\therefore \quad K(t) = n \log(q + pe^t)$$

இப்பொழுது $\frac{d}{dt}[K(t)] = n \frac{1}{(q + pe^t)} pe^t$

$$= \frac{n \cdot p \cdot e^t}{(q + pe^t)}$$

$$= \frac{np\, e^t}{pe^t\left(\frac{p}{pe^t} + 1\right)}$$

$$= n\left[1+\frac{q}{p}\ e^{-t}\right]^{-1}$$

ஆனால் $z = \log e\left(\frac{p}{q}\right)$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகையால் $\frac{p}{q} = e^z$ என்றாகும்.

எனவே $\frac{d}{dt}[K(t)] = n[1 + e^{-z}e^{-t}]^{-1}$

$$= n[1 + e^{-(z+t)}]^{-1}$$

10. ஆறு சமச்சீரான நாணயங்களை ஒரு பரிசோதனைக்காக எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை 6400 தடவைகள் சுண்டுகிறார்கள். இதில் 6 பூக்கள் 10 தடவைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை, பாய்சான் பரவலைக் கொண்டு தோராயமாகக் கண்டுபிடி.

வழக்கமான குறியீட்டைப் பயன்படுத்த,

$n = 6400.\ p = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ என்று அறிகிறோம்.

$\therefore$ கூட்டுச்சராசரி $m = np$

$$= 6400 \times \frac{1}{2^6}$$

$$= 100$$

பாய்சான் பரவலில் $(Px) = \frac{e^{-m}\cdot m^x}{\angle x}$ என்று தெரியும்.

$\therefore\ P(10) = \frac{e^{-100}\cdot 100^{10}}{\angle 10}$ என்றாகும்.

அதாவது 6 பூக்கள் 10 தடவைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{e^{-100}\cdot 100^{10}}{\angle 10}$

11. மருந்து தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்றில், ஒரு வகை மருந்தை சிறு புட்டிகளில் நிரப்பி, அப்புட்டிகளை பத்து பத்தாக அட்டைப்பெட்டிகளுக்குள் வைத்து விற்பனைக்கு அனுப்புகின்றனர். மருந்துப் புட்டிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று தரக்குறைவாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{500}$. விற்பனைக்காக ஒருமுறை அனுப்பப்படும் 10,000 அட்டைப் பெட்டிகளுள், ஒரு மருந்து புட்டிகூட தரக்குறைவின்றி இருக்கக் கூடிய பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையையும்; ஒரே ஒரு மருந்து புட்டி தரக்குறைவானதாக இருக்கக் கூடிய பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையையும் பாய்சான் பரவலின் உதவியினால் கண்டுபிடி.

மருந்துபுட்டி குறையுடையதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\}$ $P = \frac{1}{500}$

$\therefore$ பாய்சான் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி, $m = np$

$$= 10 \times \frac{1}{500}$$

$$= \frac{1}{500} = 0{\cdot}02$$

மேலும் நிகழ்தகவுச் சார்பு, $P(x) = \frac{e^{-m}\, m^x}{\angle x}$

$$= \frac{e^{-\cdot 02} \times (\cdot 02)^x}{\angle x}$$

$$\therefore \; P(0) = e^{-\cdot 02}$$

எனவே 10000 பெட்டிகளுள் ஒன்றில் கூடதரக்குறைவான புட்டி இல்லாதிருக்கக் கூடிய பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை $\Big\}$ $= 10000 \times e^{-\cdot 02}$

$$= 10000 \times (0{\cdot}9802)$$

$$= 9802$$

111 rly அவற்றுள் ஒரே ஒரு புட்டி குறையுடையதாக இருக்கக் கூடிய பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை $\Big\}$ $= 10000 \times \frac{e^{-m} \cdot m^1}{\angle 1}$

$$= 10000 \times e^{-\cdot 02} \cdot (0{\cdot}02)$$

$$= 9802 \times 0{\cdot}02$$
$$= 196$$

(தோராய முழு மதிப்பு)

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கான பாய்சான் பரவலைக் கண்டுபிடி. இந்த அலை வெண்களை கணக்கிடப்படும் அலை வெண்களோடு ஒப்பிட்டுப்பார். ($e^{-1\cdot5} = 0{\cdot}2231$)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	கூடுதல்
$f(x)$	229	325	257	119	50	17	2	1	0	1000

பாய்சான் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை m என்க.

கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து,

$$m = \frac{\Sigma\, x \cdot f(x)}{\Sigma f(x)}$$

$$= \frac{1500}{1000} = 1{\cdot}5$$

$\therefore$ நிகழ்தகவுச் சார்பு, $P(x) = \dfrac{e^{-1\cdot5} \times (1{\cdot}5)^x}{\angle x}$ இதிலிருந்து அலை வெண்களின் தோராய மதிப்பை பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

ஆகையால், $1000 \times P(0) = 1000 \times e^{-1\cdot5} = 223{\cdot}1$

$$1000 \times P(1) = 1000 \times \frac{e^{-1\cdot5} \times (1{\cdot}5)}{\angle 1} = 334{\cdot}7$$

$$1000 \times P(2) = \frac{1000 \times e^{-1\cdot5} \times (1{\cdot}5)^2}{\angle 2} = 251{\cdot}0$$

$$1000 \times P(3) = \frac{1000 \times e^{-1\cdot5} \times (1{\cdot}5)^3}{\angle 3} = 125{\cdot}5$$

$$1000 \times P(4) = \frac{1000 \times e^{-1\cdot5} \times (1{\cdot}5)^4}{\angle 4} = 47{\cdot}1$$

$$1000 \times P(5) = \frac{1000 \times e^{-1.5} \times (1{\cdot}5)^5}{\angle 5} = 14{\cdot}1$$

$$1000 \times P(6) = \frac{1000 \times e^{-1.5} \times (1{\cdot}5)^6}{\angle 6} = 3{\cdot}5$$

$$1000 \times P(7) = \frac{1000 \times e^{-1.5} \times (1{\cdot}5)^7}{\angle 7} = 0{\cdot}8$$

$$1000 \times P(8) = \frac{1000 \times e^{-1.5} \times (1{\cdot}5)^8}{\angle 8} = 0{\cdot}2$$

13. X எனும் புள்ளியியல் மாறி பாய்சான் பரவலில் அமைந்துள்ளது. X-ன் மதிப்பு ஒன்று என்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவும், அதன் மதிப்பு 2 என்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவும் சமம் என்றால், X-ன் மதிப்பு முறையே 3, 4 என்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடு.

பாய்சான் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி m என்றால்,

$$P(X = 1) = \frac{e^{-m} \cdot m}{\angle 2} = m \cdot e^{-m}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-m} \cdot m^2}{\angle 2} = \frac{m^2 e^{-m}}{2}$$

இவை இரண்டும் சமம் எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்,

$$m e^{-m} = \frac{m^2 \cdot e^{-m}}{2}$$

$$i.e., \ 2 = m ; \qquad i.e., \ m = 2$$

$$\therefore \ P(X = 3) = \frac{e^{-m} \cdot m^3}{\angle 3} = \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{6} = \frac{4}{3} e^{-2}$$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-m} \cdot m^4}{\angle 4} = \frac{e^{-2} \cdot 2^4}{24} = \frac{2}{3} e^{-2}$$

14. பாய்சான் பரவலுக்கான வழக்கமான குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, $\mu_{r+1} = mr\,\mu_{r-1} + m \dfrac{d\,\mu_r}{dm}$ என்று நிரூபி.

இத் தொடர்பின் உதவியால், μ_2, μ_3, μ_4-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

$\mu_r = E\ [\ (X - m)^r\ ]$; (m = பாய்சான் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி)

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left[(x - m)^r \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x} \right]$$

$$\therefore \frac{d\mu_r}{dm} = \sum_{x=0}^{\infty} \left\{ r (x - m)^{r-1} \cdot (-1) \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x} \right.$$

$$+ (x - m)^r \cdot \frac{e^{-m} \cdot (-1) \cdot m^x}{\angle x}$$

$$\left. + (x - m)^r \cdot \frac{e^{-m} \cdot x \cdot m^{x-1}}{\angle x} \right\}$$

$$i.e., m\frac{d\mu_r}{dm} = \sum_{x=0}^{\infty} (-mr) \cdot (x - m)^{r-1} \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$$

$$+ \sum_{x=0}^{\infty} (x - m)^r \left[\frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x} (-m + x) \right]$$

$$= -mr \sum_{x=0}^{\infty} (x - m)^{r-1} \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$$

$$+ \sum_{x=0}^{\infty} (x - m)^{r+1} \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}$$

$$= -mr\, \mu_{r-1} + \mu_{r+1}$$

$$i.e., \mu_{r+1} = mr\, \mu_{r-1} + m \frac{d\mu_r}{dm}$$

$$r = 1 \text{ என்றிட, } \mu_2 = m \cdot 1 \cdot \mu_0 + m \cdot \frac{d\mu_1}{dm}$$

$$= m + m \cdot 0$$

$$= m$$

$$r = 2 \text{ என்றிட, } \mu_3 = m \times 2 \times \mu_1 + m \cdot \frac{d\mu_2}{dm}$$

$$= 0 + m \cdot 1$$

$$= m$$

$$r = 3 \text{ என்றிட, } \mu_4 = m \times 3 \times \mu_2 + m \cdot \frac{d\mu_3}{dm}$$

$$= 3m \cdot m + m \cdot 1$$

$$= 3m^2 + m$$

15. ஒரு பரிசோதனையின்போது குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஒன்று வெற்றிபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·6 என்று கொடுக்கப்பட்டால், அந்நிகழ்ச்சிக்கு முதல் வெற்றி கிடைப்பதற்குமுன் அதிகமாக மூன்று தோல்விகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து ஒரு பெருக்குப் பரவல் உருவாகும் என்று தெரிகிறது. மேலும், இங்கு $p = 0{\cdot}6$; $\therefore \quad q = 0{\cdot}4$ என்றாகும்.

X என்ற மாறி குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிக்கு முதல் வெற்றி கிடைப்பதற்குமுன் ஏற்படும் தோல்விகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad P(X = x) = (0{\cdot}4)^x \times (0{\cdot}6)$$

$$\text{எனவே } P(X < 3) = \sum_{x=0}^{2} (0{\cdot}4)^x \times (0{\cdot}6)$$

$$= 0{\cdot}6 + 0{\cdot}4 \times 0{\cdot}6 + (0{\cdot}4)^2 \times (0{\cdot}6)$$

அதாவது, முதல் வெற்றி கிடைக்குமுன் அதிக 3 தோல்விகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு. $\Big\} = 0{\cdot}936$

16. நீச்சல் போட்டி ஒன்றில், ஒருவர் குறிப்பிட்ட குளத்தை நீந்தி கடப்பதற்கான வெற்றி வாய்ப்பு 0·4 என்றால், அப் போட்டியில் பத்தாவதாக நீந்துபவர் வெற்றியடைவதில் நான்காவதாக வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் பாஸ்கல் பரவலைத் தருகிறது.

$\therefore$ $(k + x)$ பெர்னௌலி முயற்சிகளில், k வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x) = {}^{x+k-1}c_x \cdot p^k \cdot q^x$$ என்று தெரியும்.

இங்கு $k + x = 10,\ k = 4,\ p = 0.4,\ q = 0.6$

$$\therefore \quad P(X = 6) = 9c_6 \times (0.4)^4 \times (0.6)^6$$

$$= 0.1,$$ தோராயமாக.

17. தேயிலை கம்பெனி ஒன்றில் வெளிநாடுகளுக்கு ஏற்றுமதி செய்யப்படும் தேயிலை, 100 கிராம் பொட்டலங்களாக தயாரிக்கப்படுகிறது. இப்பொட்டலங்களை ஐம்பது ஐம்பதாக தனித்தனிப் பெட்டிகளுள் வைத்து அடைக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு ஏற்றுமதிக்கு அனுப்பத்தயாராக இருக்கும் பெட்டிகளுள் ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து 5 பொட்டலங்களை எடுத்து, தரக்கட்டுப்பாட்டு அதிகாரிகள் பரிசோதிக்கின்றனர். 5 பொட்டலங்களிலும் உள்ள தேயிலையின் தரம் சரியானதாக இருந்தால் எல்லா பெட்டிகளையும் ஏற்றுமதி செய்யலாம் என்று அறிவிக்கின்றனர். ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொட்டலங்களிலுள்ள தேயிலை தரக் குறைவாக இருப்பின், எல்லாப் பொட்டலங்களையும் பரிசோதனை செய்கின்றனர். இவ்வாறு அனுப்பப்படும் தேயிலை பெட்டிகளுள், ஒருமுறை மூன்று மூன்று பொட்டலங்களில் தரக்குறைவான தேயிலை இருப்பதாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டால், எல்லாப் பொட்டலங்களையும் பரிசோதனை செய்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

இந்தப் புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து, X எனும் மாறி உயர் பெருக்குப் பரவலில் அமையும் என்று தெரிகிறது.

இங்கு X என்ற புள்ளியியல் மாறி தரக்குறைவான தேயிலை உள்ள பொட்டலங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும்.

$$\therefore \quad P(X = x) = \frac{{}^{m}C_x \cdot {}^{n}C_{r-x}}{{}^{m+n}C_r}\ ;\ x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots r$$

இங்கு $m = 3$, $n = 47$, $r = 5$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேலும் $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - \left(\frac{{}^{3}C_0 \cdot {}^{47}C_5}{{}^{50}C_5}\right)$$

$$= 1 - 0{\cdot}72$$

$$= 0{\cdot}28$$

பயிற்சி 3.

1. ஒரு பரிசோதனையில் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு தோல்வி அடைவதற்கான வாய்ப்பைப் போன்று இருமடங்காகும். இப்பரிசோதனை செய்யப்படும் ஆறு பெர்னௌவ்லி முயற்சிகளுள் குறைந்தது நான்கில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. [விடை : $\frac{496}{729}$]

2. A, B என்ற இருவர் ஒரு விளையாட்டுப் போட்டியில் கலந்து கொள்கிறார்கள். அப்போட்டியில் A வெற்றியடைவதற்கான வாய்ப்பு $\frac{2}{3}$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், 8 போட்டிகளில் குறைந்தது ஆறில் A வெற்றி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? [விடை : $\frac{1024}{2187}$]

3.

x	0	1	2	3	4	கூடுதல்
$P(x)$	8	32	34	24	5	103

இவ் வட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கான ஈருறுப்புப் பரவலைக் காண்க. அட்டவணையில் உள்ள அலைவெண்களை கணக்கிடப்படும் அலைவெண்களோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்.

[விடை : $103\,[0{\cdot}466 + 0{\cdot}534]^4$]

4. 8 சமமான நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டி விடப்படும் நிகழ்ச்சியை 256 தடவைகள் நடத்திய போது, ஒவ்வொரு தடவையும் கிடைத்த தலைகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு:

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	8	கூடுதல்
அலைவெண்	2	6	30	52	67	56	32	10	1	256

இதை ஒரு ஈருறுப்புப் பரவல் எனக் கருதி, பரவலின் திட்ட விலக்கத்தினைக் கண்டுபிடித்து, கணக்கியல் திட்ட விலக்கத்துடன் ஒப்பிடுக.

5. ஒரு முயற்சியில் வெற்றிக்கான வாய்ப்பு 0·01 என்றால், எத்தனை முயற்சிகள் எடுத்துக் கொண்டால் குறைந்தது ஒரு வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$, அல்லது $\frac{1}{2}$-ஐ விட அதிகமாக இருக்கும். [விடை : $n \geq 69$]

6. போர் நிகழும் போது, எதிரிகள் குண்டுவீச்சினால் வெற்றிகரமாக தாக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·8 என்றால், ஈருறுப்புப் பரவலைப் பயன்படுத்தி, 10 முறை குண்டுவீசும் போது, சரியாக 4 முறை குறி தவறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி. [விடை : 0·0881]

7. ஈருறுப்புப் பரவல் ஒன்றின் கூட்டுச் சராசரி 5 என்றும், மாறுபாடு $\frac{15}{4}$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், அப்பரவலின் முகடு என்ன? [விடை : 5]

8. மதுரை நகரின் ஒரு பகுதியிலுள்ள 800 குடும்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் 5 குழந்தைகள் உள்ளன. குழந்தை ஒவ்வொன்றும் ஆணாகவோ அல்லது பெண்ணாகவோ இருப்பதற்கு சமவாய்ப்பு இருந்தால், எத்தனை குடும்பங்களில் (*i*) 3 பெண்கள், (*ii*) 5 பையன்கள், (*iii*) 2 அல்லது 3 பெண்கள் இருக்கக் கூடும். [விடை : (*i*) 250, (*ii*) 25, (*iii*) 500]

9. X என்ற தொடர்ச்சியற்ற மாறி 0, 1, 2, ... n என்ற மதிப்புகளை ஏற்கும் என்றும், அம் மதிப்புகளுக்கொப்பான நிகழ்தகவுகள் முறையே 1, n_{c_1}, n_{c_2}, ... n_{c_n} என்ற எண்களின் ஒரு நிலையான மடங்குகள் என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால். X-ன் பரவல் ஒரு ஈருறுப்புப் பரவல் என்று காட்டு. மேலும்,

அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\frac{n}{2}$ என்றும், திட்ட விலக்கம் $\sqrt{n}/2$ என்றும் நிரூபி.

10 சமச்சீரான கனசதுரப் பகடை ஒன்றை உருட்டி விளையாடும் நிகழ்ச்சி N தனித்தனி முயற்சிகளில் நடத்தப்படு கிறது. ஒவ்வொரு முயற்சியின் போதும், பகடையை 8 முறை உருட்டுகின்றனர் இவ்வாறு விளையாடும் போது, 5 அல்லது 6 என்ற எண் கிடைப்பது ஒரு வெற்றியாகக் கருதப்படும். 3 வெற்றிகள் கிடைக்கும் என்பதை அம்முயற்சிகளுள் எத்தனை விகிதம் எதிர்பார்க்கலாம். [விடை : 27·31]

11. ஒரு அலுவலகத்தில் 100 நாட்களில் வந்து சேர்ந்த கடிதங்களின் விவரம் கீழே அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது. இதை ஒரு பாய்சான் பரவலின் சரிசம வாய்ப்புக் கூறாக எடுத்துக் கொண்டால், அப்பரவலைக் காண்க. எதிர்பார்க்கும் அலை வெண்கள் என்ன? ($e^{-4} = 0{\cdot}0183$ என்க)

கடிதங்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	கூடுதல்
அலைவெண்	1	4	15	22	21	20	8	6	2	0	1	100

[விடை : $\left(\frac{e^{-4} \times 4^r}{\angle r}\right) \times 100$]

12. ஒரு கூறு சோதனையின் மூலம் பின்வரும் புள்ளி விவரம் கிடைத்தது.

X	0	1	2	3	4	கூடுதல்
$F(X)$	2	5	8	3	2	20

இதை ஒரு பாய்சான் பரவலில் அமைக்கவும்,

[விடை : $\left(\frac{e^{-1{\cdot}9} \times (1{\cdot}9)^r}{\angle r}\right) \times 20$]

13. ஒரு பாய்சான் பரவலுக்கு $x=1, x=2$ என்ற இரட்டை முகடுகள் இருந்தால், x-எனும் பாய்சான் மாறிக்கு இவற்றுள்

ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு உண்டு என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

[விடை : $2 \cdot e^{-2}$]

14. ஒருவர், வாடகைக்கு விடுவதற்காக இரண்டு கார்கள் வைத்திருக்கிறார். அவை ஒவ்வொன்றையும் ஒவ்வொரு நாளும் வாடகைக்கு அனுப்பப்படும் தடவைகளின் எண்ணிக்கைகள், 1·5 என்ற எண்ணை கூட்டுச் சராசரியாக உடைய ஒரு பாய்சான் பரவலில் அமைகின்றன. ஒரு கார் கூட வாடகைக்குச் செல்லாத நாட்களின் விகிதத்தையும், சிலரது தேவைகளை மறுக்க வேண்டிய நாட்களின் விகிதத்தையும் கணக்கிடுக. $\left(e^{-1\cdot5} = 0\cdot2516\right)$

[விடை : 0·223, 0·191]

15. ஒரு நிறுவனத்தில் தயாரிக்கப்படும் மின்சார விளக்கு களில் 3% பயனற்றவைகளாகிவிடுகின்றன. அங்கு தயாரிக்கப் பட்ட 100 விளக்குகளில் (*i*) எல்லா விளக்குகளும் பயன்படக் கூடியவைகளாக இருப்பதற்கான; (*ii*) 4 விளக்குகள் பயனற்றவை களாக இருப்பதற்கான (*iii*) ஐந்து விளக்குகளுக்குமேல் பயனற்ற வைகளாக இருப்பதற்கான, நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடி.

[விடை : (*i*) 0·049, (*ii*) 0·168, (*iii*) 0·084]

16. மருத்துவமனை ஒன்றில், 10 நிமிட இடைவெளியில் சராசரி 4 அவசர அழைப்புகள் வருகின்றன. 10 நிமிட இடை வெளியில் அதிகமாக 2 அவசர அழைப்புகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவையும், 14 நிமிட இடைவெளியில் சரியாக 3 அவசர அழைப்புகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவையும், பாய்சான் பரவலின் உதவியினால் கண்டுபிடி.

$$\left[\text{விடை : } 13 \cdot e^{-4}, \ \frac{32}{3} e^{-4}\right]$$

17. x, y என்பன, முறையே m_1, m_2 என்பனவற்றை துணை அலகுகளாக உடைய பாய்சான் பரவல்களில் அமையும் இரண்டு மாறிகளாயின், $(x-y)$ எனும் மாறி r என்ற மதிப்பைப் பெறுவதற் கான நிகழ்தகவு,

$e^{(m_1 t + m_2 t^{-1} - m_1 - m_2)}$ —ன் விரிவிலுள்ள t^r-ன் குணகம் என்று காட்டு.

18. இரண்டு பாய்சான் மாறிகளின் வித்தியாசம் ஒரு பாய்சான் மாறியாக இருக்க முடியுமா என்பதை காரணத்துடன் விளக்கு.

19. p எனும் ஒரே துணை அலகை உடைய பெருக்குப் பரவல்களில் அமையும் k சார்பிலா மாறிகளின் கூட்டுத்தொகை ஒரு பாஸ்கல் மாறி என்று நிறுவுக. இம் முடிவைப் பயன்படுத்தியாகிலும், அல்லது வேறு முறையிலாகிலும், பாஸ்கல் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\frac{kq}{p}$ என்றும், மாறுபாடு $\frac{kq}{p^2}$ என்றும் காட்டு. $(p+q=1)$

20. p-ன் மதிப்பு மாருதுள்ள பாஸ்கல் பரவல்களில் அமையும் பல சார்பிலா மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையும் ஒரு பாஸ்கல் மாறி என்று நிறுவு.

21. $(Q-P)^{-k}$-ன் விரிவிலுள்ள உறுப்புகளை நிகழ்தகவுகளாகக் கொண்ட குறை ஈருறுப்புப் பரவலின் குவிவுச் சார்பு $K(t) = -k \log[1-p(e^t-1)]$ என்று நிரூபி. இதிலிருந்து $K_1 = kP$ என்றும், $K_2 = kPQ$ என்றும் காட்டு. $(Q-P=1)$

22. ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு, 4 வெள்ளை, 3 பச்சை நிறப் பந்துகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அப் பெட்டியிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு பந்தை எடுத்து அதன் நிறத்தை அறிந்துகொண்டபின் மீண்டும் பெட்டியில் வைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு எடுக்கப்படும் 6 பந்துகளுள், 3 சிவப்பு, 2 வெள்ளை மற்றும் ஒரு பச்சைப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

[விடை : $\frac{625}{5184}$]

23. ஒரு சீரான பகடையை ஆறுமுறை உருட்டும்போது, ஒரு ஒன்றும், இரண்டு இரண்டுகளும், மூன்று மூன்றுகளும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி. பகடையில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒருமுறை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவையும் கணக்கிடுக.

[விடை : $\frac{5}{3888}$]

24 பல்லுறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பின் மதிப்பு $[p_1 e^{t_2} + \dots\dots\dots + p_k e^{t_k}]$ என்று நிரூபி. $(p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1)$.
இச்சார்பைப் பயன்படுத்தி, பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $E(n_i) = n\, p_i$,

(ii) $\text{Var}(n_i) = n\, p_i(1-p_i)$

(iii) $\text{cov}(n_i, n_j) = -n\, p_i\, p_j \ (i \neq j)$

4. தொடர் சரி சம வாய்ப்பு மாறிகள்
(CONTINUOUS RANDOM VARIATES)

4·1 தொடர் சரிசமவாய்ப்பு மாறியும், அதன் பரவலும்

4·1-1 நிகழ்தகவுப் பரவல் : X எனும் சரிசமவாய்ப்பு மாறி எண்ணிடலங்கா, அல்லது முடிவற்ற மதிப்புகளை ஏற்கும் என்க. அதாவது, a, b என்பன ஏதேனும் இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட மெய்யெண்களாயின், (a, b) எனும் இடைவெளியில் உள்ள எண்ணிலடங்கா மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் X எனும் மாறி அடைய முடியும் என்க. பின் X-ஐ ஒரு "தொடர் (அல்லது தொடர்ச்சியான) மாறி" என்றும், அதன் நிகழ்தகவுப் பரவலை "தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவல்" என்றும் கூறுகிறோம்.

4·1-2 அடர்த்திச் சார்பு : $f(x)$ என்பது ஒரு தொடர்புடைச் சார்பாக இருக்கட்டும். X எனும் தொடர் மாறியின் மதிப்பு $\left(x - \frac{1}{2}dx, x + \frac{1}{2}dx\right)$ என்ற நுண்ணிய இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $[f(x) \cdot dx]$ என்று இருக்குமானால், பின் $f(x)$ ஐ X-ன் "நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு" அல்லது சுருக்கமாக "அடர்த்திச் சார்பு" (Probability Density Function, or Density Function) என்று அழைக்கிறோம்.

$$\text{அதாவது, } P\left(x - \frac{1}{2}dx \leq X \leq x + \frac{1}{2}dx\right) = f(x) \cdot dx$$

என்றிருக்குமானால், $f(x)$ ஓர் அடர்த்திச் சார்பாகும்.

மேலும், $f(x) \cdot dx$-ஐ "நிகழ்தகவு வகையீடு" (Probability Differential) என்பர்.

4·1-3 நிகழ்தகவு வளைவரை : இங்கு $y = f(x)$ என்று எடுத்துக் கொள்வோமானால், இச்சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும் வளைவரை,

X-ன் "நிகழ்தகவு அடர்த்தி வளைவரை"; அல்லது "நிகழ்தகவு வளைவரை" எனப்படும். இவ்வளைவரை சமச்சீருள்ளதாயின் X-ன் பரவலும் சமச்சீரானது என்கிறோம்.

X என்ற மாறியின் வீச்செல்லை முடிவுடையதொன்றாகவோ அல்லது முடிவற்றதாகவோ இருக்கக் கூடும். ஒரு குறிப்பிட்ட பரவலில் X-ன் வீச்செல்லை முடிவுடையதாக கொடுக்கப் பட்டிருப்பினும், அவ்வீச்சுக்கு வெளியில், அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பை பூஜ்யம் எனக்கொள்வதன் மூலம் வீச்செல்லையை முடிவற்றதாக மாற்ற இயலும்.

அதாவது, (a, b) என்ற குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் உள்ள மதிப்புகளை X ஏற்கும்போது, $f(x)$-ன் மதிப்பு $\phi(x)$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், X-ன் பரவலை முடிவற்ற வீச்செல்லையில் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$x < a$ எனும் போது, $f(x) = 0$ என்றும்;

$a \leq x \leq b$ எனும் போது, $f(x) = \phi(x)$ என்றும்,

$x > b$ எனும் போது, $f(x) = 0$ என்றும் கொள்வது வழக்கம். இப்பொழுது X-ன் வீச்செல்லை $(-\infty, \infty)$ என்பதாகும்.

4.1-4 அடர்த்திச் சார்பின் பண்புகள் : எந்த ஒரு நிகழ்தகவின் மதிப்பும் மிகை எண்ணாகவோ, அல்லது பூஜ்யமாகவோ இருக்கக் கூடுமே தவிர குறை எண்ணாக இருக்கமுடியாது மேலும் நிச்சயமாக நடக்கக்கூடிய ஒரு நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு ஒன்று என்று இருக்கவேண்டும்.

ஆகையால் அடர்த்திச் சார்பின் பண்புகள் வருமாறு

(அ) x-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f(x) \geq 0$

(ஆ) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

4.1-5 வரை கணித விளக்கம் : X என்ற தொடர் மாறியின் பரவல் (a, b) என்ற முடிவுடைய வீச்செல்லைக்குள் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். பின், $a < a' < b' < b$ என்றமையு மாறு a', b' என்ற எண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். ஆகையால், X-ன் மதிப்பு (a', b') என்ற இடைவெளியில் அமைவதற்கான ழ்தகவு

$$P(a' \leq X \leq b') = \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$$ என்று வரையறுக்கப்படும்.

இங்குள்ள வலதுபக்கத் "தொகை"யின் மதிப்பு, $y = f(x)$ என்றவளைவரைக்கும், $x = a'$, $x = b'$, X-அச்சு ஆகிய கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் குறிக்கும் என்று நமக்குத் தெரியும். ஆகையால் இப்பரப்பு, X-ன் மதிப்பு (a', b') என்ற வீச்செல்லையில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்கும் என்று அறிகிறோம்.

இவ்வாறு, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்றால், $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்குட்பட்ட மொத்தபரப்பு ஒன்று என்றாகும். எனவே, நிகழ்தகவு வளைவரைக்குட்பட்ட மொத்தபரப்பு ஒன்று என்றிருக்குமானால், குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நடப்பது உறுதி என்று அறியலாம்.

இதேபோன்று $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்குட்பட்ட வெவ்வேறு பரப்புகளைக் காண்பதன் மூலம், X-ன் மதிப்பு வெவ்வேறு வீச்செல்லைகளுக்குள் அமைவதற்கான நிகழ்தகவுகளைப் பெறலாம்.

4·1-6 குவிவுப் பரவல் சார்பு (Cumulative Distribution Function). $F(x)$ என்ற சார்பு, X எனும் தொடர் மாறியின் மதிப்பு x-க்குச் சமமாகவோ, அல்லது x-ஐ விட குறைவாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்குமாயின், $F(x)$-ஐ X-ன் "குவிவுப் பரவல் சார்பு" அல்லது "பரவல் சார்பு" என்று கூறுகிறோம்.

அதாவது $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$ என்றாகும்.

$F(x)$-ன் பண்புகளாவன :

(அ) $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \geq 0$, அதாவது $F(x)$ குறையும் சார்பு அல்ல,

(ஆ) $x_1 < x_2$ எனில், x-ன் மதிப்பு (x_1, x_2) என்ற இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(x_1 \le x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$ என்பதாகும்.

(இ) $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$

குறிப்பு : (i) மேலே குறிப்பிட்ட பண்புகளை உடைய ஏதேனும் ஒரு வகையிடத்தக்க தொடர்புடையச் சார்பு $F(x)$-ஐயும் x என்ற மாறியின் குவிவுப்பரவல் சார்பாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு, $F(x)$ என்பது பரவல் சார்பாயின் பின் அம்மாறியின் அடர்த்திச் சார்பு,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = F(x)$$ என்பதாம்.

$$(ii) \quad F(b) = P(x \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

$$\therefore \quad P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$ என்று கிடைக்கும்.

$$(iii) \quad P(x_1 \le x \le x_2) = P(x_1 \times \le x_2)$$

$$= P(x_1 \times < x_2)$$

$$= P(x_1 \times < x_2)$$

4·2 கணித இயல் எதிர் நோக்கல்

$f(x)$ எனும் தொடர்புடைச் சார்பை அடர்த்திச் சார்பாகவும், $F(x)$-ஐ பரவல் சார்பாகவும் உடைய x என்ற புள்ளியியல் தொடர் மாறியை எடுத்துக் கொள்வோம். பின் $\phi(x)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு சார்பின் எதிர் நோக்கலை,

$$E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, d[F(x)]$$ என்று வரையறுக்கிறோம்.

இங்கு காணப்படும் வலது புறத் தொகையானது "உளதாயி ருக்கும்" எனக் கொள்ள வேண்டும்.

இந்தொகையை $\phi(x)$-ன் சராசரி மதிப்பு என்றும் கூறலாம். குறிப்பாக, $\phi(x) = x$ என்றால்,

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$ என்றாகும்

இதை X-ன் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு என்று கூறுவர். இதைக் குறிப்பிட $\bar{X}$ என்ற அடையாளத்தையும் பயன்படுத்தலாம்.

$$\therefore \quad \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

4·2·1 மைய நிலைப்போக்கு அளவைககள் (Measures of Central Tendency) :

(அ) கூட்டுச்சராசரி : X எனும் மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரியை, X-ன் எதிர் நோக்கல் என்று வரை யறுக்கிறோம்.

$$\therefore \quad X\text{-ன் கூட்டுச் சராசரி}, \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

(ஆ) பெருக்குச் சராசரி G என்பது X-பரவலின் பெருக்குச் சராசரி என்றால், $\log G = \int_{-\infty}^{\infty} \log x\, f(x)\, dx$ என்று வரை யறுக்கப்படும்.

i.e., $G = E(\log x)$ என்று தெரிகிறது.

(இ) இசைச் சராசரி. $\frac{1}{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f(x)\, dx$ என்றவாறமையுமாறு H என்ற எண் இருக்குமானால் H-ஐ X-ன் "இசைச் சராசரி" என்று கூறுகிறோம்.

$$\therefore \frac{1}{H} = E\left(\frac{1}{X}\right)$$ என்று விளங்கும்.

(ஈ) இடைநிலை அளவு: X என்ற மாறியின் மதிப்பு a எனும் எண்ணைவிட அதிகமாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு விகிதமும் a-ஐ விட குறைவாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு விகிதமும் சமமாக இருக்குமானால், பின் a என்ற எண்ணை X-ன் இடைநிலை அளவு என்று கூறுகிறோம்.

அதாவது, $P(X > a) = (X < a)$ என்றிருக்குமானால் a இடை நிலை அளவு எனப்படும்.

இதிலிருந்து, $$\int_{-a}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$ என்று கிடைக்கும்.

(உ) முகடு அல்லது முகட்டளவு: X-ன் எம்மதிப்பிற்கு, நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு மீப்பெரிதாக இருக்குமோ, அம் மதிப்பை X-ன் முகடு என்று கூறப்படும். எனவே, X-ன் அடர்த்திச் சார்பாகிய $f(x)$ வகையிடத்தக்கதாக இருப்பின்,

$\frac{d}{dx}[f(x)] = 0$ $\frac{d^2}{dx^2}[f(x)] < 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு கிடைக்கப்பெறும் X-ன் மதிப்பை முகடு என்கிறோம் இந்த z-ன் மதிப்பு, X என்ற மாறியின் வீச்செல்லைக்குள் இருக்க வேண்டும் என்பது குறிப்பிடப்படவேண்டும்.

[குறிப்பு: இங்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொகைகள் அனைத்தும் உளதாயிருக்கும் எனக்கொள்ள வேண்டும்.]

4·2-2 பரவுகை அளவுகள் (Measures of Dispersion).

(அ) கால்மான விலக்கம்: $$\int_{-\infty}^{Q_1} f(x)\, dx = \frac{1}{4} = \int_{Q_3} f(x)\, dx$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு கிடைக்கப்பெறும் Q_1, Q_3-ன்

மதிப்புகளை முறையே பரவலின் முதல் கால்மான விலக்கம், மூன்றும் கால்மான விலக்கம் என்று கூறப்படும். இவற்றை கால்மானங்கள் (அல்லது கால்மம்) என்றும் கூறுவதுண்டு.

(ஆ) பதின்மம் : $\int_{-\infty}^{Q_n} f(x)\, dx = \frac{r}{10}$ என்ற நிபந்தனைக்குட் பட்டு அமையும் Q_r-ன் மதிப்பை X-பரவலின் r-ஆவது பதின்மம் என்கிறோம்.

குறிப்பு: குவிவுப் பரவல் $F(x)$-ஐப் பயன்படுத்தியும் கால் மான விலக்கங்கள், பதின்மம் முதலியனவற்றை விளக்கலாம்.

$F(Q_1) = \frac{1}{4}$, $F(Q_3) = \frac{3}{4}$, $F(Q_r) = \frac{r}{10}$ என்றமையும் Q_1 Q_3 Q_r-ன் மதிப்புகளை முறையே முதல் கால்மம், மூன்றும் கால்மம், r-ஆவது பதின்மம் என்று கூறுவோம்.

இதேபோன்று, இடைநிலை அளவு Q_2-வை,

$F(Q_2) = \frac{1}{2}$ என்றமையும் மதிப்பெனக் கூறுவர்.

(இ) திட்ட விலக்கம்: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)\, dx$ என்றிருப் பின் σ-ன் மிகை மதிப்பை X-பரவலின் திட்ட விலக்கம் என்பர். அதாவது, $\sigma^2 = \mu_2$ Var (x) என்று விளங்கும்.

$$\therefore\ \sigma = + \sqrt{\mu_2} = + \sqrt{\text{arV}(x}$$

(ஈ) கூட்டுச்சராசரி விலக்கம்: $\int_{-\infty}^{\infty} |\ x - \bar{X}\ |\ f(x)\, dx$ என்ற தொகை உளதாயிருக்குமானால், இம்மதிப்பு X-பரவலின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் என்று கூறப்படும்.

$$\therefore\ \text{கூட்டுச்சராசரி விலக்கம்} = E[\ |\ X - \bar{X}\ |\ ]$$

4.3 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் : (அ) a என்பது ஒரு மாரு மெய்யெண்ணுகவும், r என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு

எண்ணுகவோ அல்லது பூஜ்யமாகவோ இருக்கட்டும். பின் $E[x-a)^r]$ என்ற எதிர் நோக்கல் உளதாயிருக்குமானால், அம் மதிப்பை a-ஐ மையமாகக் கொண்ட x-ன் r.ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்று கூறுகிறோம். (இங்கு x என்பது ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலையுடைய ஒரு புள்ளியியல் மாறியாகும்)

ஆகையால், □ x-ன் r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$= E[(x-a)^r]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^r \cdot f(x)\, dx$$

(ஆ) $a=0$ என்றிட, ($E[x^r]$ என்ற எதிர்நோக்கல் உளதாயிருக்குமானால், இதை ஆதியை (பூஜ்யத்தை) மையமாகக் கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை என்பர். இதைக் குறிப்பிட μ'_r என்ற குறியீடு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$$\therefore \quad \mu'_r = E(x^r)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx \text{ என்றாகும்.}$$

(இ) இதே போன்று x-ன் கூட்டுச் சராசரி, $\bar{x}$-ஐ மையமாகக் கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை வரையறுக்கலாம். இதை μ_r என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

$$\therefore \quad \mu_r = E[(x-\bar{x})^r]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^r \cdot f(x) \cdot dx \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

குறிப்பு : r-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கிடைக்கப்பெறும்.

$$\mu_0 = E[(x-\bar{x})^0] = E(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\mu_1 = E[(x-\bar{x})) = \quad = E(x)-E(\bar{x})=\bar{x}-\bar{x}\cdot 1=0$$

$$\mu_2 = E[x-\bar{x})^2] = \quad = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)\,dx$$

இந்த 2-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை x-ன் மாறுபாடு என்றும் கூறுவதுண்டு. இதை Var (x) என்று குறிப்பிடுவர்.

$$\therefore \quad \text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}[x^2-2x\,\bar{x}+(\bar{x})^2]\,f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx - 2\,\bar{x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx + [(x)^2]\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$$

அதாவது, $\text{Var}(x) = E(x^2)-2\,E(x)\cdot E(x)+[E(x)]^2.1$
$= E(x^2)-[E(x)]^2.$

4·4 விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு

x எனும்தொடர் மாறியின் அடர்த்திச் சார்பை $f(x)$ என்க. பின், (e^{tx}) என்ற சார்பின் எதிர் நோக்கலை, x-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு என்று கூறுகிறோம். இதை $M_x(t)$ என்று குறிப்பிடுவோமானால்,

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\cdot f(x)\cdot dx \text{ என்றாகும்.}$$

இங்கு காணப்படும் தொகை உளதாயிருந்தால்தான் இவ்வரையறைக்கும் பொருள் உண்டு என்பதை அறிவோம்.

$t=0$ எனும்போது இத்தொகை குவியும் என்று தெரியும். ஆகையால், $M_x(t)$-ன் மதிப்பு உளதாயிருக்கும் என்று அறிகிறோம். மேலும்,

$$M_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

ஆனால் t-ன் பூஜ்யமல்லா மதிப்புகளுக்கு இத்தொகை குவியும் என்று கூற முடியாது. ஏனெனில் $E[| e^{tx} |]$ என்ற எதிர்நோக்கல், t-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், உளதாயிருக்க வேண்டுமென்பது அவசியமில்லை எனினும் ஒரு சில பரவல் களின் அமைப்பைப் பொறுத்து இத்தொகை குவியக்கூடும். எடுத்துக்காட்டாக A என்பது ஒரு முடிவுடைய எண்ணாக இருந்து $(-A)$-ஐ விட அதிகமான மதிப்புகளைத்தான் x என்ற மாறி ஏற்கும் என்று கொடுக்கப்பட்டால், $t \leq 0$ எனும்போது மேலே குறிப்பிட்ட தொகை குவியும் என்று காணலாம். இம்மாதிரி A எனும் முடிவுடைய எண் இல்லாவிடினும், $(-\infty)$-ஐ நோக்கி x-ன் மதிப்பு குறையும்போது, $f(x)$-ன் மதிப்பு புஜ்யத்தை நோக்கி வேகமாக குவிந்தாலும், இத்தொகை உளதாயிருக்கும் என்று தெரியும். இவ்வாறு, இந்த நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு அமையும் பரவல் களுக்குத்தான் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு காண இயலும் என்று தெரிகிறது.

பொதுவாக, எல்லா நிகழ்தகவுப் பரவல்களுக்கும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு உளதாயிருக்க வேண்டு மென்பது அவசியமில்லையாதலால், தொடர்மாறிப் பரவல்களில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை எளிய முறையில் கணக்கிட சிறப்பியல்புச் சார்புகள் என்பனவற்றை பெரும்பாலும் பயன் படுத்துகிறோம். இவற்றைப் பற்றிய விரிவான விவரங்களை அடுத்துவரும் பகுதியில் காணலாம்.

4.5 சிறப்பியல்புச் சார்பு

X-என்பது ஒரு-பரிமாண தொடர் சரிசம வாய்ப்பு மாறி என எடுத்துக் கொள்வோம். பின்வரும் முடிவுகள் ஒரு பரிமாண மாறி X-க்கு உண்மையென நிரூபிக்கப் பட்ட போதிலும் அவற்றை விரித்துக் கூற n-பரிமாண மாறிக்கும் அவை பொருந் தும் என நிரூபிக்க முடியும்.

t என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் எனவும், $i = \sqrt{-1}$ எனும் கற்பனை எண் என்றும் கொள்வோம். பின்,

$\phi(X) = e^{itx} = \cos tX + i \sin tX$ என்பது ஒரு கலப்புச் சார்பாகும். இச் சார்பின் எதிர் நோக்கலை X-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பு என்று வரையறுக்கிறோம். இதை $C_x(t)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். ஆகையால், X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ எனில்,

$$C_x(t) = E(e^{itx})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot f(x)\, dx \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

$E[|e^{itx}|] = 1$ என்பதால், t ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், X-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பை வரையறுக்க முடியும்.

4·5-1 தேற்றம் 1. X எனும் சரிசமவாய்ப்பு மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு $C_x(t)$ என்றால், a, b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மெய்யெண்கள் எனில், $Y = aX + b$ என்ற மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு $[e^{itb} \cdot C_x(at)]$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

நிரூபணம்

$$C_Y(t) = E[e^{it(ax+b)}]$$
$$= E[e^{itax} \cdot e^{itb}]$$
$$= E[e^{itb}] \cdot E[e^{itax}]$$
$$= e^{itb} \cdot C_x(at)$$

துணை முடிவு

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \text{ என்றால், } C_z(t) = e^{\frac{-it\mu_x}{\sigma_x}} \cdot C_x\left(\frac{t}{\sigma_x}\right)$$

4.5-2 தேற்றம் 2 X, Y என்ற இரண்டு சார்பிலா சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளின் சிறப்பியல்புச் சார்புகள் முறையே $C_x(t)$, $C_Y(t)$ என்றால், $Z = X + Y$ என்ற மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு அவற்றின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

நிரூபணம்

$$C_z(t) = E[e^{itz}] = E[e^{it(x+y)}]$$
$$= E[e^{itx} \cdot e^{ity}]$$

$$= E[e^{itx}] \cdot E[e^{ity}] \quad (\because \ X, Y \text{ சார்பிலாதனவாய்})$$

$$= C_x(t) \cdot C_y(t).$$

அதாவது, $C_{x+y}(t) = C_x(t) \cdot C_y(t)$

குறிப்பு: இத் தேற்றத்தை பல மாறிகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும் விரித்துக் கூறலாம். அதாவது, பல சார்பிலா சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையின் சிறப்பியல்புச் சார்பு, அந்த மாறிகளின் தனித்தனி சிறப்பியல்புச் சார்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

4.5-3 சிறப்பியல்புச் சார்பைப் பயன்படுத்தி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை காணல்: X என்ற சரிசம வாய்ப்புமாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், ஆதியை மையமாகக் கொண்ட X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை பின்வருமாறு கண்டு பிடிக்கலாம்.

$$C_x(t) = E[e^{itx}]$$

$$= E\left[1 + \frac{itX}{\angle 1} + \frac{(it)^2 \cdot X^2}{\angle 2} + \frac{(it)^3 \cdot X^3}{\angle 3} + \cdots \to \infty\right]$$

$$= E(1) + E\left(\frac{itX}{\angle 1}\right) + E\left[\frac{(it)^2 \cdot X^2}{\angle 2}\right] + E\left[\frac{(it)^3 \cdot X^3}{\angle 3}\right] + \cdots \to \infty$$

$$= 1 + \frac{it}{\angle 1} E(X) + \frac{(it)^2}{\angle 2} E(X^2) + \frac{(it)^3}{\angle 3} E(X^3) + \cdots \to \infty$$

$$= 1 + \frac{it}{\angle 1} \mu_1' + \frac{(it)^2}{\angle 2} \mu_2' + \frac{(it)^3}{\angle 3} \mu_3' + \cdots \to \infty$$

$\therefore \ \mu_r' = C_x(t)$-ன் விரிவிலுள்ள $\dfrac{(it)^r}{\angle r}$-ன் குணகம் என்று தெரிகிறது.

மேலும், $\mu_r' = \frac{1}{i^r} \cdot \left[\frac{d^r}{dt^r}\{C_x(t)\}\right]_{t=0}$ -ன் என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

இதில் $r = 0, 1, 2, 3, \ldots \ldots\ldots$ என்றிட, வெவ்வேறு படிகளையுடைய X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைப் பெறலாம்.

இவ்வாறு, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பைப் போன்று, சிறப்பியல்புச் சார்பும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை எளிதில் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது என்று அறிகிறோம்.

4.5-4 சிறப்பியல்புச் சார்பின் பண்புகள் இங்கு X-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பை $C(t)$ என்றே குறிப்பிடலாம். $C(t)$-ன் பண்புகளாவன.

(அ) $C(t)$ என்பது, t-ல் ஒரு தொடர்புடைய சார்பாகும்.

(ஆ) முடிவுடைய, t-ன் ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும், $C(t)$-ஐ வரையறுக்கலாம்.

(இ) $C(0) = 1$; $C(t)$-யும், $C(-t)$-யும் துணையியை சார்புகளாக இருக்கும்.

(ஈ) $$|C(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| f(x)\, dx$$

$$\leq 1$$

i.e., $|C(t)| \leq C(0)$

இங்கு குறிப்பிட்ட நான்கு பண்புகளும், $c(t)$ ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பாக இருப்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளேயன்றி அவை போதுமானவை அல்ல. ஆனால் $c(t)$ ஏதேனும் ஒரு பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பாக இருப்பதற்கு போதுமான எளிய நிபந்தனைகள் எவை என்பதும் குறிப்பாகத் தெரியாது. எனினும், கிராமர் (Cramer) என்ற கணித மேதை பின்வரும் நிபந்தனைகள் ஏதேனும் ஒரு t-ன் சார்பு சிறப்பியல்புச் சார்பாக இருப்பதற்கு தேவையானதும், போதுமானதுமானவை எனக் கண்டுள்ளார்.

(அ) $c(0) = 1$

(ஆ) $\psi(z) = \int_0^{\infty} \int_0^{c} c(t-z) \cdot e^{ix(t-z)} dt\, dx$ என்ற

சார்பு, x-ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும். $c > 0$ எனும்போது, மெய்யானதாகவும், குறை மதிப்பற்றதாகவும் இருக்கும்.

குறிப்பு: ஒரு தொடர் சரிசம வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் கொடுக்கப்பட்டால், அப்பரவலுக்கு ஒப்பான சிறப்பியல்புச் சார்பை எவ்வாறு கணக்கிடலாம் என்பதை இதுகாறும் பார்த்தோம். இதேபோன்று சிறப்பியல்புச் சார்பு தெரிந்தால், அதற்கு ஒப்பான பரவல் சார்பை கண்டு பிடிக்கும் முறையை பின்வரும் தேற்றங்களின் மூலம் அறியவிருக்கிறோம். அதாவது, t-ன் மெய் மதிப்புகளுக்கு, $c(t)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறி X-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பு என்று தெரிந்தால், அதற்கேற்ப X-ன் இணையற்ற பரவலை கணக்கிட பின்வரும் தேற்றங்கள் பயன்படும் என்று அறியலாம்.

ஆனால் ஒவ்வொரு கலப்புச் சார்பு, $c(t)$-யும் ஏதேனும் ஒரு மாறி X-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பாக இருக்கும் என்று கூறமுடியாது.

தனித்தன்மைத் தேற்றங்கள் (Uniqueness Theorems)

4.5-5 தேற்றம் 1. X-என்ற தொடர் சரிசம வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை $f(x)$ என்றும், கொடுக்கப்பட்ட சிறப்பியல்புச் சார்பு $c(t)$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். பின் $f(x)$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியாக உள்ள x எனும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \underset{T\to\infty}{Lt} \left[\int_{-T}^{T} e^{-itx}\, c(t)\, dt \right]$$

என்றிருக்கும்.

நிரூபணம்:

பின்வரும் தொகையை கவனிக்கவும்

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-itx}\, c(t)\, dt$$

ஆனால், $c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f(y)\, dy$ என்று தெரியும்.

$$\therefore\ J = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} . f(x)\, dy\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(y-x)} f(y)\, dy\right] dt$$

J-ல் உள்ள $[e^{it(y-x)} f(y)]$ எனும் தொகைச் சார்பு,

$-T \leq t \leq T,\ -\infty < y < \infty$ என்ற செவ்வக அரங்கத்தில் முற்றிலும் தொகையிடத்தக்கதாக இருப்பதால், இந்த இருமாறித் தொகையில், தொகையீடு காணும் வரிசையை மாற்றியமைக்க முடியும்.

ஆகையால், $J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left[\int_{-T}^{T} e^{it(y-x)} dt\right] dy$

என்று மாற்றலாம்.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ \left[\frac{2\sin T(y-x)}{(y-x)}\right] dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(y-x)}{(y-x)}\ f(y)\, dy$$

பூரியர் தொகையீட்டு விதியைப் (Fourier's Integral) பயன்படுத்த,

$$\underset{T\to\infty}{Lt}\ J = \frac{1}{\pi}\underset{T\to\infty}{Lt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin T(y-x)}{(y-x)} f(y)\, dy$$

$= \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)]$ என்று கிடைக்கும்.

மேலும் $f(x)$ என்ற சார்பு x எனும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியாக இருப்பதால், அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும்,

$f(x-0) = f(x) = (x+0)$ என்று தெரியும்.

எனவே, $\underset{T\to\infty}{Lt}\; J = f(x)$ என்றாகிறது.

$$i.e.,\quad f(x) = \underset{T\to\infty}{Lt}\; \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\, c(t)\, dt$$

குறிப்பு: ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டால், அதன் அடர்த்திச் சார்பை கண்டுபிடிக்க இத்தேற்றம் பயன்படும். மேலும் இரண்டு பரவல்களின் அடர்த்திச் சார்புகளுக்கான சிறப்பியல்புச் சார்புகள் ஒன்றாக இருப்பின், பின் அந்த அடர்த்திச் சார்புகள், தொடர்ச்சி இன்மைப் புள்ளிகளில் மட்டும் மாறுபட்டு, ஏனைய புள்ளிகளில் ஒரே மதிப்பை உடையனவாக இருக்கும்.

4·5-6 தேற்றம் 2. X எனும் தொடர் சரிசம வாய்ப்பு மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு $c(t)$ என்று கொடுக்கப்பட்டால், பின் X-ன் பரவல் சார்பு,

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\underset{T\to\infty}{Lt}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{itx}}{it}\right) c(t)\, dt$$ என்ற

சமன்பாட்டின் மூலம் கிடைக்கப்பெறும்.

நிரூபணம்:

J எனும் தொகையை பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

$$J = \int_{-T}^{T} C(t)\left[\int_{0}^{x} e^{-itz}\cdot dz\right] dt$$

$$i.e.,\quad J = \int_{-T}^{T} C(t)\cdot\left[\frac{1-e^{-itx}}{it}\right] dt$$ என்றிருக்கும்.

ஆனால், $C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \cdot f(y)\, dy$ என்று தெரியும்.

$$\therefore \quad J = \int_{-T}^{T} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \cdot f(y)\, dy \right] \cdot \left[\int_{0}^{x} e^{-itz} \cdot dz \right] \right\} dt \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$i.e., \; J = \int_{-T}^{T} \left\{ \int_{0}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(y-z)} \cdot f(y)\, dy \right] dz \right\} dt$$

இங்கு $u = y - z$ என்றிட, $du = dy$ என்றாகும்.

$$\therefore \int_{0}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(y-z)} \cdot f(y)\, dy \right] dz$$

$$= \int_{0}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \cdot f(u+z)\, du \right] dz \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \cdot \left[\int_{0}^{x} f(u+z)\, dz \right] du$$

(தொகைகாணும் வரிசையை மாற்றுவதன் மூலம் கிடைக்கும்.)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \left[F(u+z) \right]_{z=0}^{z=x} du \qquad [\because \; F'(x) = f(x)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \left[F(u+x) - F(u) \right] du$$

ஆகையால், $J = \int_{-T}^{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \{ F(u+x) - F(u) \} \, du \right]$

dt ……………… (3)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T}^{T} e^{itu} \, dt \right] \cdot [F(u+x) - F(u)] \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin Tu}{u} \right) [F(u+x) - F(u)] \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin T(y-x)}{(y-x)} \cdot [F(y) - F(y-x)] \, dy$$

($\therefore$ $u + x = y$ என்றிட)

எனவே $\underset{T \to \infty}{Lt} J = \underset{T \to \infty}{Lt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin T(y-x)}{(y-x)} \cdot [F(y)$

$- F(y-x)] \, dy$

$= 2\pi [F(x) - F(0)]$ (பூரியர் தொகையைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம்)

அதாவது $\frac{1}{2\pi} \underset{T \to \infty}{Lt} J = F(x) - F(0)$

குறிப்பு : (i) இங்கு கொடுக்கப்பட்ட நிரூபணத்தில், சமன்பாடுகள் (1), (2), (3)-ல் காணப்படும் தொகைச் சார்புகள் முற்றிலும் தொகையிடத்தக்கதாக உள்ளன என்று நிறுவலாம். ஆகையால் ஒவ்வொரு முறையும் தொகை காணும் வரிசையை மாற்றியுள்ளோம்.

(ii) இத் தேற்றத்தின் மூலம்; ஏதேனும் நிகழ்தகவுப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டால், அப்பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பை காணும் முறையைப் பார்த்தோம்.

இவ்வாறு நிகழ்தகவுப் பரவலில், சிறப்பியல்புச் சார்பு பல வகையிலும் மிகவும் பயன்படுகிறது என அறிகிறோம்.

4·6. காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Factorial Moments)

X என்பது ஏதேனும் ஒரு சரிசம வாய்ப்பு மாறி எனக் கொள்வோம். பின் $X(X-1)(X-2)\ldots\ldots(X-r+1)$ என்ற பெருக்குத் தொகையின் எதிர்நோக்கல் " உளதாயிருக்குமானல் ", அதை X-பரவலின் r-ஆவது காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்று அழைக்கிறோம்.

இங்கு, $X(X-1)\ (X-2)\ldots\ldots(X-r+1)$ என்ற r காரணிகளின் பெருக்குத் தொகையைக் குறிப்பிட $X^{(r)}$ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துதல் வழக்கம். மேலும், காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை $\mu_{(r)}$ என்று குறிப்பிடுவதுண்டு.

$$\therefore \quad \mu_{(r)} = E\,[X^{(r)}] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\ldots(x-r+1)\,f(x)\,dx.$$

4·6-1 காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு :

$E\,[\,(1+t)^x\,]$ எனும் எதிர்நோக்கல் உளதாயிருக்குமானல், அதை காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு என்று கூறுகிறோம். ஏனெனில்,

$$E\,[\,(1+t)^x\,] = E\left[1 + \frac{X}{\angle 1}\,t + \frac{X(X-1)}{\angle 2}\,t^2 + \ldots\ldots + \frac{X(X-1)\ldots\ldots(X-r+1)}{\angle r}\cdot t^r + \ldots\ldots\right]$$

$$= E\left[1 + \frac{X^{(1)}}{\angle 1}\,t + \frac{X^{(2)}}{\angle 2}\cdot t^2 + \ldots\ldots + \frac{X^{(r)}}{\angle r}\,t^r + \ldots\ldots\right]$$

$$= 1 + \frac{t}{\angle 1} E[X^{(1)}] + \frac{t^2}{\angle 2} E[X^{(2)}]$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{t^r}{\angle r} E[X^{(r)}] + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{t}{\angle 1} \mu_{(1)} + \frac{t^2}{\angle 2} \mu_{(2)}$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{t^r}{\angle r} \mu_{(r)} + \ldots\ldots$$

$\therefore \mu_{(r)} = E[(1+t)^x]$-ன் விரிவிலுள்ள $\frac{t^r}{\angle r}$-ன் குணகமாகும்.

4.7. செபீ செவ் சமனின்மை (Tehebychef's Inequality)

X எனும் தொடர் சரிசமவாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச்சராசரியை $\bar{X}$ என்றும், மாறுபாட்டை σ^2 என்றும் எடுத்துக்கொள்வோம். பின் t என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை எண்ணாக இருந்தால்,

$P[\,|X - \bar{X}| < t\sigma] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$ என்றோ, அல்லது

$P[\,|X - \bar{X}| \geq t\sigma] \leq \frac{1}{t^2}$ என்றோ இருக்கும்.

நிரூபணம்:

δ என்ற ஒரு மிகை எண்ணை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது;

$$\sigma^2 = E[(X - \bar{X})^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{(\bar{X}-\delta)} (x - \bar{X})^2 f(x)\, dx + \int_{(\bar{X}-\delta)}^{(\bar{X}+\delta)} (x - \bar{X})^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$+ \int_{(\bar{X}+\delta)}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) \cdot dx$$

$$\therefore \quad \sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{(\bar{X}-\delta)} (x - \bar{X})^2 f(x)\, dx + \int_{(\bar{X}+\delta)}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f(x)\, dx$$

இங்கு $(x - \bar{X})^2 \geq \delta^2$ என்று எடுத்துக்கொண்டால், $(x - \bar{X})$ மிகை எண்ணாக இருக்குமானால், $x \geq (\bar{X} + \delta)$ என்றும், $(x - \bar{X})$ குறை எண்ணாக இருந்தால், $x \leq \bar{X} - \delta$ என்றும் இருத்தல் வேண்டும். எனவே வலதுபுறத் தொகைகள் இரண்டிலும் $(x - \bar{X})^2$-க்குப் பதிலாக δ^2 என்று பிரதியிட,

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\bar{X}-\delta} \delta^2 f(x)\, dx + \int_{\bar{X}+\delta}^{\infty} \delta^2 f(x)\, dx$$

$$i.e., \sigma^2 \geq \delta^2 \cdot \{ P[X \leq \bar{X} - \delta] + P[X \geq \bar{X} \times \delta] \}$$

$$i.e., \sigma^2 \geq \delta^2 \cdot P[(X - \bar{X})^2 \geq \delta^2]$$

ஆனால் $(X - \bar{X})^2 \geq \delta^2$ என்றால், $| X - \bar{X} | \geq \delta$ என்றிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad \sigma^2 \geq \delta^2 \cdot P[\, | X - \bar{X} | \geq \delta]$$

இதில் $\delta^2 = t^2 \sigma^2$ என்றிடுவோமானால், இச்சமனின்மை,

$\sigma^2 \geq t^2 \sigma^2 \cdot P[\, | X - \bar{X} | \geq t\sigma]$ என்றாகும்.

$i.e., \frac{1}{t^2} \geq P[\, | X - \bar{X} | \geq t\sigma\,]$ என்று கிடைக்கின்றது.

இதிலிருந்து, $1 - \frac{1}{t^2} \geq P[\, | X - \bar{X} | < t\sigma\,]$ என்று கிடைக்கும்.

4·8 மார்கோவ் சமனின்மை (Markoff's Inequality)

X எனும் சரிசமவாய்ப்பு மாறிக்கு $P(X < 0) = 0$ என்றும், $E(X)$ உளதாயிருக்கும் என்றும் கொள்வோம். பின் $t \geq 1$ என்றால்,

$P\,[X < t\,\bar{X}] \geq 1 - \frac{1}{t}$ என்பது உண்மையாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$P\,[X < 0] = 0$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$ என்றிருக்கவேண்டும்.

மேலும், $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,ax$

$$= \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x f(x)\,dx \quad \left[\because \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0 \right]$$

$$= \int_{0}^{t\cdot\bar{X}} x \cdot f(x)\,dx + \int_{t\cdot\bar{X}}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$\therefore \; E(X) \geq \int_{t\bar{X}}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$i.e., \; \bar{X} \geq t\bar{X} \int_{t\bar{X}}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$i.e., \; \bar{X} \geq t\bar{X}\,[\,P(X \geq t\bar{X})\,]$$

$$i.e., \; \frac{1}{t} \geq P\,[\,X \geq t\bar{X}\,]$$

$$i.e., \; \frac{1}{t} \geq [\,1 - P(X < t\bar{X})\,]$$

$$i.e., P[X < t\bar{X}] \geq \left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

குறிப்பு : இந்த சமனின்மையில் X-க்குப்பதிலாக $(X - \bar{X})^2$ என்றும், $\bar{X}$-க்குப்பதிலாக σ^2 என்றும், t-க்குப்பதிலாக t^2 என்றும் பிரதியிட

$$P[(X - \bar{X})^2 < t^2 \sigma^2] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$ என்று கிடைக்கும்.

$$i.e., P[|X - \bar{X}| < t\sigma] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$ என்றாகும்.

இவ்வாறு மார்கோவ் — சமனின்மையிலிருந்து, செபி செவ் சமனின்மை கிடைக்கும் என்று அறிகிறோம்.

4·9. தொடர் இருமாறிப் பரவல்கள் (Continuous Bivariate Distribution)

ஒரு மாறி நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கான விளக்கத்தை விரிவு படுத்தி, இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடர்மாறி களின் பரவல்களையும் வரையறுக்க முடியும். இங்கு மாறிகள் அனைத்தும் ஒரே சமயத்தில் மாறுமென்று கருதிக் கொள்ளல் வேண்டும். இங்கு இருமாறிப் பரவல்களைப் பற்றி கவனிப் போம்.

4·9-1 நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு : இரண்டு சரிசம வாய்ப்பு தொடர் மாறிகளை X, Y என்க, இவை ஏற்கும் வெவ்வேறு மதிப்பு களை x_i, y_j $(i, j = 1, 2, 3, 4 \ldots)$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், இத்தகைய ஒவ்வொரு ஜோடி மதிப்பையும் X-Y தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியினால் குறிப்பிடக் கூடும் என்று தெரியும். மேலும் (X, Y)-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒப்பான புள்ளிகள் அனைத்தும், X, Y தளத்தின் மீதுள்ள குறிப்பிட்ட எல்லைகளை யுடைய ஒரு அரங்கத்தில் அமையும் என்றும் கொள்ளலாம். இத்தகைய அரங்கத்தை (Domain) R என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

(X, Y) என்ற மாறிகளின் ஏதேனும் ஒரு ஜோடி மதிப்பைக் குறிக்கும் (x, y) என்ற புள்ளி, $(dx\, dy)$ எனும் பரப்பை உடைய ஒரு நுண்ணிய செவ்வகப் பகுதியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $f(x, y)\, dx\, dy$ என்றிருக்குமானால், $f(x, y)$ எனும் இருமாறிச்

சார்பை X, Y என்ற மாறிகளின் "கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு" (Joint Probability Density Function) என்று கூறுகிறோம். இதை பின்வருமாறு குறிப்பிடுகிறோம்.

$$P\left[x-\frac{1}{2}dx \leq X \leq x+\frac{1}{2}dx,\ y-\frac{1}{2}dy \leq Y \leq y+\frac{1}{2}dy\right] = f(x, y)\,dx\,dy.$$

அடர்த்தி சார்பின் பண்புகள்

(i) X-Y தளத்தின் மீதுள்ள (x, y)-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f(x, y) \geq 0$ என்றிருக்கும்.

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$$

(iii) $$P\left[a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right] = \int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dx\,dy$$

இங்கு a, b, c, d என்பன கொடுக்கப்பட்ட மெய்யெண்களாகும்.

4·9-2 பரவல் சார்பு

$$P\left[X \leq x,\ Y \leq y\right] = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dx\,dy$$

என்ற x, y-ன் சார்பை "குவிவுப் பரவல் சார்பு" என்று அழைக்கிறோம். இதை $F(x, y)$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

$$\therefore\ F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dx\,dy$$

என்றாகும்.

பரவல் சார்பின் பண்புகள்

(i) (x, y)-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், $0 \leq F(x, y) \leq 1$

(ii) $F(x, y)$ குறையும் சார்பல்ல.

(iii) $F(x, -\infty) = 0 = F(-\infty, y)$; $F(\infty, \infty) = 1$

(iv) $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial_x \partial_y} = f(x, y)$

(v) $P[x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2]$
$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$

4.9-3 விளிம்பு அடர்த்திச் சார்பும், நிபந்தனைக்குட்பட்ட அடர்த்திச் சார்பும் (Marginal and Conditional Density Functions):

(x, y)-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x,y)$ என்றால்,

$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$ என்ற சார்பை "X-ன் விளிம்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு" என்றும்

$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$ எனும் சார்பை "Y-ன் விளிம்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு" என்றும் கூறுகிறோம்.

Y கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $h(y) > 0$ என்றிருக்குமாறு அமையும் y-ன் மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை,

$$g(x/y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$ என்று வரையறுகிறோம்.

இதே போன்று. X கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $g(x) > 0$ என்பதற்கு ஏற்ப அமையும் x-ன் மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப, Y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$h(y/x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$ என்று வரையறுக்கப்படும்.

(x, y)-ன் எல்லாமதிப்புகளுக்கும் $g(x/y) = g(x)$ என்றிருக்குமானால், X என்ற மாறி Y-ஐச் சார்ந்திராது என்றும், $h(y/x) = h(y)$ என்றிருக்குமானால், Y என்ற மாறி X-ஐச் சார்ந்திராது என்றும் அறியலாம். மேலும் X என்பது y-ஐச் சார்ந்திராவிடில், Y-ம் X-ஐச் சார்ந்திருக்க முடியாது என்று தெரியும். (X, Y) என்பன சாராமாறிகளாக இருந்தால், $f(x, y)$-ஐ $g(x)$, $h(y)$ என்ற இரண்டு தனித்தனி சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதலாம்.

i.e., $g(x) \cdot h(y) = f(x, y)$ என்றிருக்கும்.

4·9-4 கணக்கியல் எதிர் நோக்கல் $\phi(x, y)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு சார்பு என்க. மேலும் இங்கு வரக்கூடிய தொகைகள் அனைத்தும் உளதாயிருக்கும் என்க:

பின், $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) \cdot f(x, y)\, dx\, dy$ என்ற இருமாறித் தொகையை $\phi(x, y)$-ன் எதிர் நோக்கல் என்று வரையறுக்கிறோம். இதைக் குறிப்பிட $E[\phi(x, y)]$ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$\therefore$ $\phi(x, y)$-ன் எதிர் நோக்கல், $E[\phi(x, y)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy.$$

4·9-5 விலக்கப் பெருக்குத்தொகை x, y என்பன இரண்டு தொடர் மாறிகளாக இருப்பின், $(X^r Y^s)$-ன் எதிர் நோக்கலை, ஆதியை மையமாகக் கொண்ட X-ல் r படியும், Y-ல் s படியும் உள்ள விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்கிறோம். இதை μ'_{rs} என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

$$\therefore \quad \mu'_{rs} = E[X^r \cdot Y^s] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot y^s \cdot f(x, y)\, dx\, dy$$

இதே போன்று, $\bar{X}, \bar{Y}$ என்பன முறையே X, Y-ன் கூட்டுச் சராசரிகள் என்றால், $[(X-\bar{X})^r \cdot (Y-\bar{Y})^s]$-ன் எதிர் நோக்கலை கூட்டுச் சராசரியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்று கூறுகிறோம். இதை μ_{rs} என்று குறிப்பிடுவதுண்டு.

$$\therefore \quad \mu_{rs} = E[(X-\bar{X})^r \cdot (Y-\bar{Y})^s]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^r \cdot (y-\bar{Y})^s \; f(x, y)\, dx\, dy$$

குறிப்பாக,

$$\mu_{20} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^2 \cdot f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^2\, g(x)\, dx$$

இதை, X-ஐச் சார்ந்த திட்ட விலக்க வர்க்கம், σx^2 என்றும் அழைப்பதுண்டு. இதே போன்று Y ஐச் சார்ந்த திட்ட விலக்க வர்க்கம், $\sigma\, y^2$-ன் மதிப்பு, $\mu_{02} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y-\bar{Y})^2 f(x, y)\, dx\, dy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (y-\bar{Y})^2\, h(y)\, dy$$

மேலு μ_{11} எனில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை X, Y என்ற மாறிகளின் மாறுபாடு, cov (X, Y) என்பர்.

$$\therefore \quad \text{Cov}\,(X, Y) = \mu_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})\;(y-\bar{Y})\; f(x, y)\, dx\, dy.$$

அடுத்து, $\frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20} \cdot \mu_{02}}}$ எனும் மதிப்பை X, Y-க்கு இடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு (Correlation Coefficient) என்று கூறுவர். இதை r_{xy} என்று குறிப்பிடுவதுண்டு.

$$\therefore \quad r_{xy} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20} \cdot \mu_{02}}} \; ; (\mu_{20} \neq 0, \mu_{02} \neq 0$$

4·9-6 விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு t_1, t_2 என்பன ஏதேனும் இரண்டு மெய்யெண்களாயின், $e^{t_1 X} \cdot e^{t_2 Y}$ -ன் எதிர் நோக்கலை X, Y-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு என்கிறோம்

$$\text{அதாவது, } M(t_1, t_2) = E\left[e^{t_1 X} \cdot e^{t_2 Y}\right]$$
$$= E\left[e^{(t_1 X + t_2 Y)}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t_1 x + t_2 y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

இங்கு வலதுபுற இரு மாறித் தொகை "உளதாயிருக்கும்" எனக் கொள்கிறோம். மேலும் $e^{t_1 x}$, $e^{t_2 y}$ என்ற படிக்குறிச் சார்புகளை, t_1, t_2-ன் படிகள் ஏறு வரிசையில் இருக்குமாறு விரித்து எழுதுவோமானால், $M(t_1, t_2)$-ல் உள்ள $\left(\frac{t_1^r}{\angle r} \cdot \frac{t_2^s}{\angle s}\right)$-ன் குணகம் μ'_{rs} எனும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும் என்று அறியலாம். இவ்வாறும் பின் வரும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைப் பெறலாம்.

$$\mu'_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, dx$$

$$\mu'_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, h(y)\, dy$$

எதிர் நோக்கலின் இரண்டு முக்கிய தேற்றங்கள்.

4·9-7 தேற்றம் 1. (X, Y) என்பது ஏதேனும் ஒரு, இரு பரிமாணத் தொடர் சரி சம வாய்ப்பு மாறி என்க. மேலும் $\alpha(x)$, $\beta(y)$ என்ற இரண்டு சார்புகளின் எதிர் நோக்கல்கள் உளதாயிருக்கும் என்றும் கொள்வோம். பின்,

(i) $[\alpha(x) + \beta(y)]$ ன் எதிர் நோக்கல் உளதாயிருக்கும் என்றும்,

(ii) $E[\alpha(x) + \beta(y)] = E[\alpha(x)] + E[\beta(y)]$ என்றும் நிறுவலாம்.

நிரூபணம் :

(X, Y) எனும் இரு பரிமாண தொடர் மாறியின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை $f(x, y)$ என்க. எனவே,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \text{ என்றும் } h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

என்றும் தெரியும்.

$\phi(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ என்க.

$$\text{இப்பொழுது, } E[\phi(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y)$$

$$f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x) + \beta(y)]\, f(x, y)\,dx\,dy$$

$$\therefore \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x\ y)\,dx\,dy \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\phi(x, y)\right| f(x, y)\,dx\,dy$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\,|\alpha(x)| + |\beta(y)|\,]\; f(x,y)\, dx\, dy$$

$$i.e.\ \left|\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x)|$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\beta(y)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\right] dy$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x)|\; g(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\beta(y)|\, h(y)\, dy$$

$E[\alpha(x)]$, $E[\beta(y)]$ என்பன உளதாயிருக்கும் எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், வலதுபுறத் தொகைகள் ஒவ்வொன்றும் குவியும் எனத் தெரிகிறது. எனவே, இடதுபுறத் தொகையும் குவிய வேண்டும். அதாவது $E[\phi(x, y)]$ உளதாயிருக்கும் என்கிறது. ஆகையால்;

$$E[\phi(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x) + \beta(y)]\; f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dv\right] dx \;+$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, g(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y)\, h(y)\, dy$$

$$i.e.,\ E[\alpha(x) + \beta(y)] = E[\alpha(x)] + E[\beta(y)];$$

4.9-8 தேற்றம் 2. X, Y என்பன இரண்டு சார்பிலா ஒரு பரிமாண தொடர் சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளாக இருக்கட்டும். மேலும் $\alpha(x)$, $\beta(y)$ என்ற சார்புகளின் எதிர் நோக்கல்கள் உளதாயிருக்கும் எனக் கொள்வோம். பின்,

(i) $E[\alpha(x)\,\beta(y)]$ உளதாயிருக்கும் என்றும்,

(ii) $E[\alpha(x)\,\beta(y)] = E[\alpha(x)]\,E[\beta(y)]$ என்றும் நிருபிக்க முடியும்.

நிருபணம்

(X, Y)-ஐ இரு பரிமாண தொடர் மாறியாகக் கருதி, அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை $f(x, y)$ எனக் கொள்வோம். X, Y என்பன சார்பிலா மாறிகள் என்று கொடுக்கப் பட்டிருப்பதால்,

$f(x, y) = g(x)\,h(y)$ என்று எழுதமுடியும்.

இங்கு, $\phi(x, y) = [\alpha(x) \cdot \beta(y)]$ என்க.

ஆகையால், $$E[\phi(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\cdot\beta(y)\cdot g(x)\cdot h(y)\,dx\,dy$$

எனவே, $$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y)\,f(x, y)\,dx\,dy\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x)|\;|\beta(y)|\;|g(x)\,h(y)\,dx\,dy$$

$$\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x)|\,g(x)\,dx\right] \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\beta(y)|\,h(y)\,dy\right]$$

ஆனால் $E[\alpha(x)]$, $E[\beta(y)]$ என்பன உளதாயிருக்கும் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகையால் மேலேயுள்ள சமனின்மையின் வலது பக்கத் தொகைகள் ஒவ்வொன்றும் குவியும் என்று தெரிகிறது. எனவே இடது பக்கத் தொகையும் குவிய வேண்டும் என அறிகிரேம். அதாவது $E[\phi)x, y)]$ என்பது உளதாயிருக்கும் என்று கிடைக்கிறது.

$$\therefore \quad E[\phi(x\,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\cdot\beta(y)\cdot g(x)\cdot h(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, g(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y)\cdot h(y)\, dy$$

i.e., $E[\alpha(x)\cdot\beta(y)] = E[\alpha(x)]\cdot E[\beta(y)]$

4.9-9. நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர்நோக்கல் (Conditional Expectation) (X, Y) எனும் இரு பரிமாண சரிசம வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை $f(x, y)$ என்க.

மேலும் X, Y என்ற மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகளை முறையே $g(x)$; $h(y)$ என்க. பின் Y கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர் நோக்கல், $E[X/Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{f(x, y)}{h(y)}\right] dx$ என்று வரையறுக்கப்படும். இதே போன்று, X கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், Y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர்நோக்கலை,

$$E[Y/X] = \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\frac{f(x, y)}{g(x)}\right] dy$$ என்று வரையறுக்கிறோம்.

குறிப்பு: X, Y என்பன சார்பிலா மாறிகளாயின்,

$E[X/Y] = E(X)$ என்றும், $E[Y/X] = E(Y)$ என்றும் அமையும். ஏனெனில் X, Y சார்பிலாதனவாக இருப்பதால், $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ என்று இருக்கும்.

தேற்றம் :

Y கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர்நோக்கலின் எதிர்நோக்கல், X-ன் எதிர்நோக்கலுக்குச் சமம்.

அதாவது, $E[E(X/Y)] = E(X)$

நிரூபணம் :

$$E[X/Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{h(y)}\, dx \text{ என்று தெரியும்.}$$

$$\therefore \quad E[E(X/Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(X/Y) \cdot h(y)\, dy.$$

$$i.e., \; E[E(X/Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f(x, y)}{h(y)}\, dx\right] h(y)\, dy$$

இங்குள்ள எதிர்நோக்கல்கள் அனைத்தும் உளதாயிருப்பதால், வலது புறத்தில் உள்ள இரட்டைத் தொகையின் வரிசையை மாற்றியமைக்கலாம்.

$$\therefore \quad E[E(X/Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{h(y)} \cdot h(y)\, dy\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, dx$$

$$\left(\because \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \right)$$

$$= E(X)$$

இதேபோன்று, $E[E(Y/X)] = E(Y)$ என்றும் நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் :

1. X என்ற சரிசமவாய்ப்பு தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, $f(x)$-ன் மதிப்பு, $0 < x \le 1$ என்ற இடைவெளியில் $(2x)$ என்றும், x-ன் ஏனைய மதிப்புகளுக்கு பூஜ்யம் என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், பின்வருவனவற்றைக் கண்டுபிடி.

$$(i)\ P\left(X \le \frac{1}{2}\right);\ (ii)\ P\left[X \le \frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right];$$

$$(iii)\ F(x).$$

$$(i)\ P\left[X \le \frac{1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$$

$$+ \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (2x)\, dx$$

$$= 0 + [x^2]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

(ii) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ என்று தெரியும்.

$$\therefore \quad P\left[X \le \frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right] = \frac{P\left[\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}\right]}{P\left[\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right]}$$

இப்பொழுது, $P\left[\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}\right] = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (2x)\, dx$$

$$= [x^2]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$$

இதேபோன்று, $P\left[\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{3}$ என்று கிடைக்கும்.

எனவே, $P\left[X \le \frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}\right] = \frac{\left(\frac{5}{36}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{5}{12}$

(iii) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx; \quad (0 < x \le 1)$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{x} (2x)\, dx; \quad (0 < x \le 1)$$

$$= 0 + x^2 = x^2; \quad (0 < x \le 1)$$

$x > 1$ என்பதற் கேற்ப அமையும், x-ன் ஏனைய மதிப்புகளுக்கு, $F(x) = 1$ என்று காட்டலாம்.

2. X-என்ற தொடர் மாறியின் அடர்த்திச் சார்பு கீழே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $0 \leq x \leq 1$ எனில், $f(x) = ax$

(ii) $1 \leq x \leq 2$ எனில், $f(x) = a$

(iii) $2 \leq x \leq 3$ எனில், $f(x) = -ax + 3a$

(iv) x-ன் ஏனைய மதிப்புகளுக்கு, $f(x) = 0$.

a-ன் மதிப்பையும், குவிவுப் பரவல்சார்பு $F(x)$-ஐயும் கண்டுபிடி.

$f(x)$ என்பது X-பரவலின் அடர்த்திச் சார்பு என்றால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \text{ என்றிருக்கவேண்டும்.}$$

$$i.e., \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{2} f(x)\, dx$$

$$+ \int_{2}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$i.e., \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{1} (ax)\, dx + \int_{1}^{2} (a)\, dx$$

$$+ \int_{2}^{3} (-ax + 3a)\, dx + \int_{3}^{\infty} (0)\, dx = 1$$

$$i.e., a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + a\left[x\right]_1^2 + \left[-a\frac{x^2}{2} + 3ax\right]_2^3 = 1$$

$$i.e., a\cdot\frac{1}{2} + a + \left(\frac{-a}{2}\right)(9-4) + (3a)(3-2) = 1$$

$$i.e., a = \frac{1}{2}$$

இங்கு $f(x)$-ன் மதிப்பு வெவ்வேறு இடைவெளிகளிலும் வேறுபட்டிருப்பதால், பரவல் சார்பு $F(x)$-ன் மதிப்பையும், ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் தனித்தனியே கணக்கிடவேண்டும்.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \text{ என்று தெரியும்.}$$

$\therefore\ -\infty < x \leq 0$ என்றால்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} (0)\,dx = 0.$$

$0 \leq x \leq 1$ என்றால்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{x^2}{4}$$

$1 \leq x \leq 2$ என்றால்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2}x\right)dx + \int_{1}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{4}(2x-1)$$

$2 \leq x \leq 3$ என்றால்,

$$F(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\right) dx$$

$$+ \int_2^x \left(\frac{-x}{2} + \frac{3}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{x^2-4}{2}\right) + \frac{3}{2}(x-2)$$

i.e., $F(x) = -\frac{1}{4}(5 - 6x + x^2)$.

$3 \leq x < \infty$ என்றால்,

$$F(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\right) dx$$

$$+ \int_2^3 \left(\frac{-x}{2} + \frac{3}{2}\right) dx + \int_3^x (0)\, dx$$

$= 1$ என்றாகும்.

3. $(0, 2)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ எனும் சார்பின் மதிப்பு பின்வருமாறு :

(i) $0 < x \leq 1$ எனில், $f(x) = \frac{4x}{5}$

(ii) $1 < x < 2$ எனில், $f(x) = \frac{2}{5}(3 - x)$

(iii) x-ன் மற்றெல்லா மதிப்புகளுக்கும், $f(x) = 0$

$f(x)$ என்பது, ஏதேனும் ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலின் அடர்த்திச் சார்பாக இருக்கும் என்று காட்டு. அப்பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பையும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளி $(0, 2)$-ல் $f(x) \geq 0$ என்று தெரிகிறது.

மேலும்,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{4x}{5}\right) dx$$
$$+ \int_{1}^{2} \frac{2}{5}(3 - x)\,dx + \int_{2}^{\infty} (0)\,dx$$
$$= \frac{4}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{5}\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$= \frac{4}{10} + \frac{2}{5}\left[\left(6 - \frac{4}{2}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left[\left(4 - \frac{5}{2}\right)\right]$$

அதாவது,
$$\int_{\infty} f(x)\,dx = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}$$
$= 1$ என்று கிடைக்கின்றது.

$\therefore$ $f(x)$ ஒரு அடர்த்திச் சார்பாக இருக்கும்.

மேலும், $F(x)$ என்பது தேவையான குவிவுப் பரவல் சார்பு எனில்,

(i) $0 < x \leq 1$ எனில்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{x} \left(\frac{4}{5}x\right) dx = \frac{2}{5}x^2.$$

(ii) $1 < x < 2$ எனில்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{4}{5}x\right) dx + \int_{1}^{x} \frac{2}{5}(3-x)\,dx$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5}\left[\left(3x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{-1}{5}\right) \cdot [x^2 - 6x + 3]$$

i.e., $1 < x < 2$ எனில்,

$$F(x) = \frac{-1}{5}(x^2 - 6x + 3)$$

(iii) 111^{rly} $2 \leq x < \infty$ எனில்,

$F(x) = 1$ என்றும் நிறுவலாம்.

4. $0 \leq x \leq 1$ என்ற இடைவெளியில் X என்ற தொடர் சரிசமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவுப் பரவல் சார்பு,

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\sqrt{x}) \text{ என்றால்,}$$

அதன் அடர்த்திச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

$f(x)$ என்பது அடர்த்திச் சார்பு எனில்,

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] \text{ என்று தெரியும்.}$$

$\therefore$ $0 \leq x \leq 1$ என்ற இடைவெளியில், $f(x)$-ன் மதிப்பு வருமாறு:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{\pi}\sin^{-1}(\sqrt{x})\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\pi\sqrt{x - x^2}}$$

(0, 1) என்ற இடைவெளிக்கு வெளியே, $f(x) = 0$ எனக் கொள்ளவேண்டும்.

5. $0 \le x \le 3$ என்ற இடைவெளியில், X என்ற சரிசம வாய்ப்பு மாறிப் பரவலின் அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு $\left(\frac{x}{6} + \lambda\right)$ என்றும், இந்த இடைவெளிக்கு வெளியே அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு பூஜ்யம் என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் λ-ன் மதிப்பு என்ன? மேலும் $P[1 \le x \le 2]$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு வரைபடம் மூலம் விடையை சரிபார்க்கவும்.

X-ன் அடர்த்திச் சார்பை $f(x)$ என்க.

ஆகையால், $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்றாகும்.

அதாவது, $$\int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{3} \left(\frac{x}{6} + \lambda\right) dx + \int_{3}^{\infty} (0)\,dx = 1$$

$$i.e., \quad \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + \lambda\left[x\right]_0^3 = 1$$

$$i.e., \frac{3}{4} + 3\lambda = 1; \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{1}{12}$$

இப்பொழுது,

$$P[1 \le x \le 2] = \int_{1}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{1}^{2} \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{12}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{12} + \frac{x}{12}\right]_1^2 = \frac{1}{3}$$

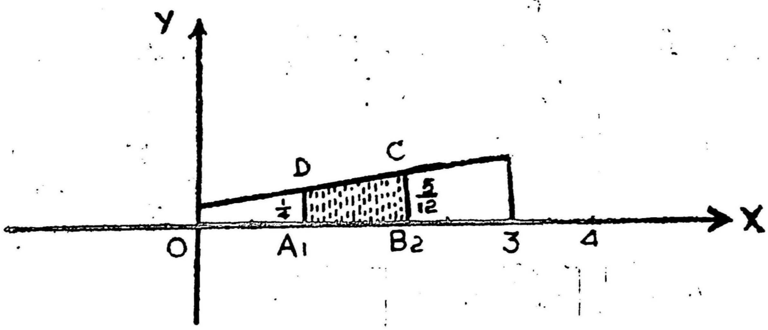
$y = f(x)$ என்ற சமன்பாடு நிகழ்தகவு வளைவரையைக் குறிக்கும் என்று தெரியும். ஆகையால், இங்கு நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு,

$$y = \frac{x}{6} + \frac{1}{12} \text{ என்பதாம்.}$$

அதாவது, $12y = 2x + 1 ; \quad 0 \leq x \leq 3$

இச்சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

மேலும், $P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 f(x)\, dx$ என்பதால்,



படம் 5.

இந்நிகழ்தகவின் மதிப்பு, $y = f(x)$ என்ற நேர்கோட்டிற்கும், X-அச்சுக்கும், $x = 1$, $x = 2$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பாகும்.

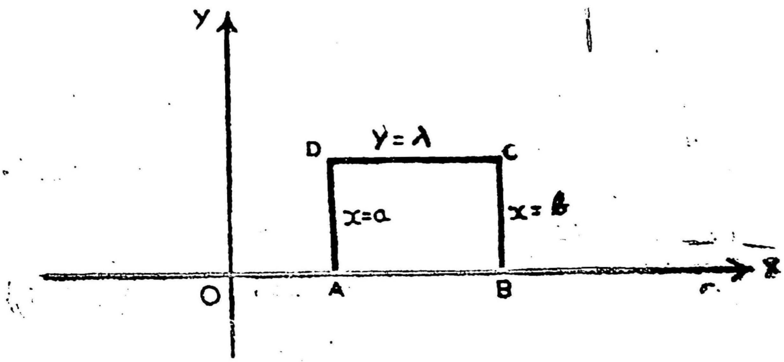
i.e., $P(1 \leq x \leq 2) =$ நாற்கரம் $ABCD$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}[AD + BC] \cdot AB$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} + \frac{5}{12}\right] \cdot 1 + \frac{1}{3} \text{ ச. அலகு.}$$

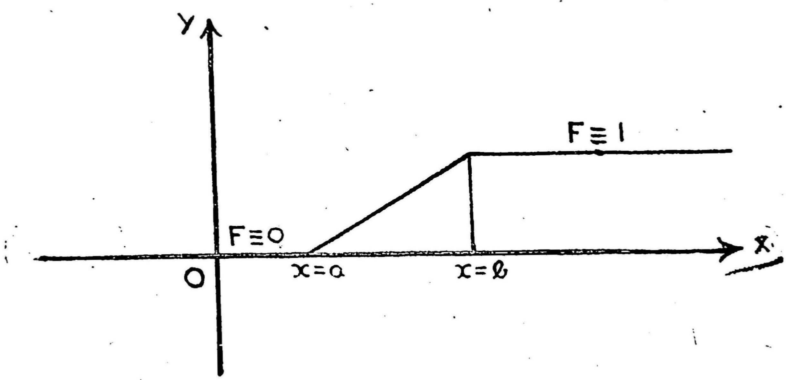
6. $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில், அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்பு ஒரு மாறுத எண்ணாகவும், x-ன் ஏனைய மதிப்புகளுக்கு அது பூஜ்யமாகவும் இருந்தால், குவிவுப் பரவல் சார்பின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. வரைபட விளக்கத்தையும் தருக. பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும் கணக்கிடு.

(1) a, b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மெய்யெண்களாகக் கொள்வோம். மேலும், $f(x) = \lambda$ என்க.



படம் 6.

இப்பொழுது, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$



படம் 7.

அதாவது, $\int_{-\infty}^{a} (0)\, dx + \int_{a}^{b} \lambda \, dx + \int_{b}^{\infty} (0)\, dx = 1$

i.e., $\lambda\ (b-a)=1$

$$\therefore\ \lambda = \left(\frac{1}{b-a}\right)$$

பரவலின் நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு $y=\lambda$ என்பதாம். இது X-அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்கோடாகும். ஆகையால்

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$ எனில், செவ்வகம் $ABCD$-ன் பரப்பு $= 1$ ஆகும்.

i.e., $AB \cdot BC = 1$; *i.e.*, $(b-a)\ \lambda = 1$; *i.e.*, $\lambda = \left(\frac{1}{b-a}\right)$

(ii) குவிவுப் பரவல் சார்பை $F(x)$ என்க.

$x < a$ எனில், $F(x) = \int_{-\infty}^{x} (0)\,dx = 0$

$a \le x \le b$ எனில், $F(x) = \int_{-\infty}^{a} (0)\,dx + \int_a^x (\lambda)\,dx$

$$= \lambda\ (x-a) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$x < b$ எனில், $F(x) = \int_{-\infty}^{a} (0)\,dx + \int_a^b (\lambda)\,dx$

$+ \int_b^{\infty} (0)\,dx = 1$ என்றாகும்.

படத்தில் தடித்த கோடு பரவல் சார்பு $f(x)$-ஐ குறிக்கும்,

(iii) கூட்டுச்சராசரி $= E(x)$

$$= \int_a^b x \cdot f(x)\, dx = \int_a^b x\, \lambda\, dx$$

$$= \lambda \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{\lambda}{2}(b^2-a^2)$$

$$= \frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2) = \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

7. ஒரு தொடர் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு பின் வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$|t| \leq 1$ எனும்போது, $\phi(t) = 1 - |t|$, என்றும்

$|t| > 1$ எனும் போது, $\phi(t) = 0$, என்றும் இருக்கும்.

அப்பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

$f(x)$ என்பது தேவையான பரவலின் அடர்த்திச் சார்பு என்க.

பின், $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\, \phi(t)\, dt$ என்று தெரியும்.

$$\therefore\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} e^{-it}\phi(t)\, dt + \int_{-1}^{0} e^{-it}\phi(t)\, dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 e^{-itx}\phi(t)\, dt + \int_1^{\infty} e^{-itx}\phi(t)\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[0 + \int_{-1}^{0} e^{-itr} (1+t)\, dt \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{1} e^{-itx} (1-t)\, dt + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{1}^{0} e^{-itx} (1-t)\, dt \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{1} e^{-tix} (1-t)\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} (1-t)\left(e^{-itx} + e^{-it}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} (1-t)\, 2\cos tx \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{0}^{1} (1-t)\, d\left(\frac{\sin tx}{x}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{(1-t)\sin tx}{x} \right]_{0}^{1} \right.$$

$$\left. - \int_{0}^{1} \left(\frac{\sin tx}{x}\right) d(1-t) \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ [0-0] = \int_0^1 \sin tx \, dt \right\}$$

$$i.e., f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} [-\cos tx]_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2} [-\cos x + 1]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \right]$$

இங்கு x-ன் எல்லை மதிப்பு $-\infty < x < \infty$ என்பதாகும்.

8. இருபரிமாண தொடர் மாறி (X, Y)-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y)$-ஐ, $0 \leq x \leq 1$, $0 \geq y \geq 2$ எனும் போது $f(x, y) = x^2 + K_{xy}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. K-ன் மதிப்பு என்ன ?

மேலும் பின்வரும் நிகழ்தகவுகளையும் கண்டுபிடி.

(i) $P\left(x > \frac{1}{2}\right)$; (ii) $P\left(Y < \frac{1}{2} / X < \frac{1}{2}\right)$,

(iii) $P(X + Y > 1)$.

$f(x, y)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக இருப்பதால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx \, dy =$$ என்றிருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + Kxy) \, dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^2 (x^2 + Kxy)\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 (2x^2 + 2\,Kx)\, dx$$

$$= \frac{2}{3} + K$$

$$\therefore \quad K = \frac{1}{3}$$

(i) இப்பொழுது, $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}\, xy \right) dz\, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2x^2 + \frac{2}{3}\, x \right) dx$$

$$= \left[2\left(\frac{x^3}{3}\right) + 2/3\left(\frac{x^2}{2}\right) \right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$\text{(ii)}\quad P\left[Y < \frac{1}{2} \Big/ X < \frac{1}{2}\right] = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x, y)\, dx\, dy}{\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\, dx}$$

இங்கு, $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}xy\right) dy$

$$= \left(2x^2 + \frac{2}{3}x\right)$$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x^2 + \frac{2}{3}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{6}$$

மேலும், $\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{3}xy\right) dx\, dy$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{24}\right) dx$$

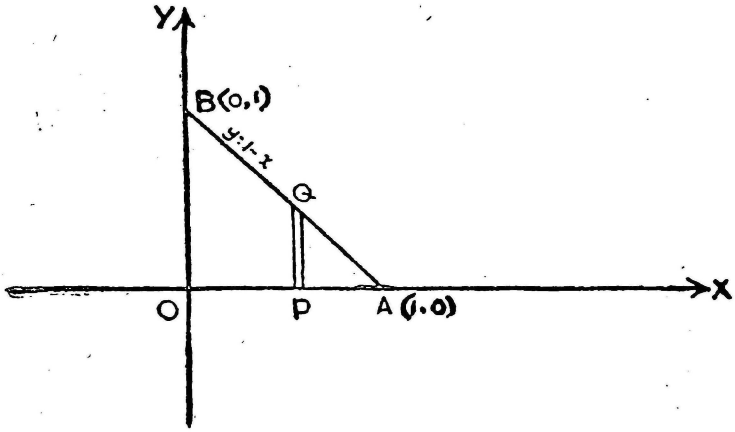
$$= \frac{5}{192}$$

$$\therefore P\left[Y < \frac{1}{2} \Big/ X < \frac{1}{2}\right] = \frac{\left(\frac{5}{192}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{5}{32}$$

(*iii*) $P(X+y>1)=1-P(X+Y\leq 1)$ என்று தெரியும்.

மேலும் $P[(X+Y)\leq 1]=\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy$; இங்கு

D என்ற அரங்கம் படத்திலுள்ள $\triangle\, OAB$-ஐக் குறிக்கும்.



படம் 8.

அரங்கம் D-ன் எல்லையைக்காண PQ எனும் கோட்டை X-அச்சுக்கு செங்குத்தாக, AB என்ற கோட்டை Q-ல் சந்திக்குமாறு வரைக. PQ-ன் மீது நகரும் புள்ளியின் y-ஆயக்கூறு $(0, 1-x)$ என்ற வீச்சில் அமையும். அடுத்து, P எனும் புள்ளி ஆதியிலிருந்து A-வரை நகரும்போது PQ என்ற கோடு $\triangle\, OAB$ முழுவதையும் உருவாக்கும். இங்கு x-ஆயக்கூறு $(0, 1)$ என்ற வீச்சில் இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ P[X+Y)\leq 1]=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left[x^2(1-x)+\frac{x}{6}(1-x)^2\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{24}\right]_0^1$$

$$= \frac{7}{72}$$

$$\therefore \quad P[(x+y) > 1] = 1 - \frac{7}{72} = \frac{65}{72}$$

பயிற்சி 4.

1. $0 \le x \le 5$ என்ற இடைவெளியில், $f(x) = kx$ என்ற சார்பு ஏதேனும் ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலின் அடர்த்திச் சார்பாக இருக்கவேண்டுமானால், k-ன் மதிப்பு என்னவென்று கண்டுபிடி. மேலும் (*i*) $P(1 \le x \le 3)$, (*ii*) $P(x \le 3)$ என்ற நிகழ்தகவுகளையும் கணக்கிடு. [விடை: $k = \frac{2}{25}$ (*i*) $\frac{8}{25}$, (*ii*) $\frac{9}{25}$]

2. X எனும் சரிசம வாய்ப்பு தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகிய $f(x)$-ன் மதிப்பு வருமாறு.

(*i*) $0 \le x \le 8$ எனில், $f(x) = \frac{1}{8}$ என்றும்,

(*ii*) x-ன் ஏனைய மதிப்புகளுக்கு $f(x) = 0$ என்றும் இருக்கும்.

$P(2 \le X \le 5)$, $P(X \ge 6)$ ஆகியவற்றின் மதிப்பையும், குவிவுப் பரவல் சார்பையும் கண்டுபிடி. [விடை: $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$

குவிவுப் பரவல் சார்பு: (*i*) $x < 0$ எனில், $F(x) = 0$

(*ii*) $0 \le x \le 8$ எனில், $F(x) = \frac{1}{8}x$

(*iii*) $x > 8$ எனில், $F(x) = 1$]

3. X என்ற தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, $f(x)$-ன் மதிப்பு $\frac{1}{2} e^{-|x|}$ என்றால், $E(X)$, Var(X) ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் என்ன? [விடை: $E(X) = 0$, Var$(X) = 2$]

4. ஒரு தொடர் மாறியின் பரவல், $dP = \frac{3}{4}\ x\ (2-x)\ dx;$ $0 \le x \le 2$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், μ_2, μ_3-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. $\left[\text{விடை: } \mu_2 = \frac{1}{5};\ \mu_3 = 0\right]$

5. ஒரு தொடர் மாறி X-ன் பரவல் பின் வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டால் X-ன் சராசரி மதிப்பையும், மாறு பாட்டையும் கணக்கிடு..

$$(i)\quad -3 < x \le -1 \text{ எனில், } f(x) = \frac{1}{16}(3+x)^2$$

$$(ii)\quad -1 < x \le 1 \text{ எனில், } f(x) = \frac{1}{16}(6-2x^2),$$

$$(iii)\quad 1 \lhd x \le 3 \text{ எனில், } f(x) = \frac{1}{16}(3-x)^2 \quad [\text{விடை : } 3,1]$$

6. $0 \le x \le 1$ எனும் போது $dF = y_0\ (x-x^2)\ dx$ என்று கொடுக்கப்படும். தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவலில், y_0 என்ற மாறிலியின் மதிப்பு என்ன? மேலும் இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, முகடு, இடைநிலை மதிப்பு முதலியனவற்றைக் கணக்கிடு.

$\left[\text{விடை: } y_0 = 6, \text{ சாரிசாரி } = \frac{1}{2} = \text{ முகடு } = \text{ இடைநிலை எண்}\right]$

7. ஒரு சரிசம வாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் நான்கு தனித்தனி மதிப்புகளுக்கு ஒப்பான நிகழ்தகவு முறையே $\left(\frac{1+3x}{4}\right)$, $\left(\frac{1-x}{4}\right)$, $\left(\frac{1+2x}{4}\right)$, $\left(\frac{1-4x}{4}\right)$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், x-ன் எம்மதிப்புகளுக்கு, இவை அப்பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்புகளாக இருக்கும்?

[விடை : $-1/3 \le x \le 1/4$]

8. $0 \le x \le 1$ என்ற வீச்சில் x எனும் தொடர்புள்ளியியல் மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவலை, $f(x) = 6x\ (1-x)$ என்று கொடுத்திருந்தால், பின் வருவனவற்றைக் கண்டுபிடி.

(i) $P\left(x \leq \frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\right)$-ன் மதிப்பு

(ii) $P(x > b) = 2\ P(x > b)$ என்றமையுமாறு b-ன் மதிப்பு

9. பின்வரும் தொடர் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இசைச் சராசரி, மாறுபாடு முதலியனவற்றைக் காண்க.

$0 \leq x \leq 1$ என்ற இடைவெளியில்,

$$dF = \frac{1}{B(m, n)} (1 - x)^{m-1} . x^{n-1}\ dx.$$

[விடை: கூ. ச $= \left(\frac{m}{m+n}\right)$, இ ச. $= \left(\frac{m-1}{m+n-1}\right)$

$$\text{மாறுபாடு} = \frac{mn}{(m+n)^2\ (m+n+1)}. \ ]$$

10. $a \leq x < \infty$ என்ற வீச்சில் $p(x) = y_0 \cdot e^{-b\,(x-a)}$ என்பது ஒரு தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு விதி என்று கொடுக்கப்பட்டால், $y_0 = b = (\sigma - 1)$ என்றும், $a = (m - \sigma)$ என்றும் நிறுவு. (இங்கு m, σ என்பன முறையே பரவலின் சராசரி, திட்டவிலக்கம் என்று கொள்க)

11. ஒரு தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவலின், குவிவுப் பரவல் சார்பு $F(x)$ வருமாறு :

(i) $x \leq 1$ என்றால், $F(x) = 0$,

(ii) $1 < x \leq 3$ என்றால், $F(x) = \frac{1}{16}(x-1)^4$

(iii) $x > 3$ என்றால், $F(x) = 1$

இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், இடைநிலை மதிப்பையும் கணக்கிடு.

[விடை $2 \cdot 6\dot{5}$, $(1 + \sqrt[4]{8})$]

12. $0 \leq x \leq 2$ என்ற இடைவெளியில் $dF = \frac{3}{4} x (2-x)\, dx$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவலில், μ'_2, μ'_3, μ_2, μ_3 ஆகிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் மதிப்புகள் என்ன? பொதுவாக ஒற்றைப்படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, $\mu_{2r+1} = 0$ என்று நிறுவு.

[விடை $\mu'_2 = \frac{6}{5}$, $\mu'_3 = \frac{3}{5}$, $\mu_2 = \frac{1}{5}$, $\mu_3 = 0$]

13. A, B என்ற இரண்டு நண்பர்கள் பிற்பகல் 4 மணியிலிருந்து 5-மணிக்குள் குறிப்பிட்ட இடம் ஒன்றில் சந்திப்பதாகத் தீர்மானித்தார்கள். ஒருவர், மற்றவருக்காக 10 நிமிடங்களுக்குமேல் காத்திருக்கக்கூடாது என்ற நிபந்தனைக் குட்பட்டு, இருவரும் சந்தித்துக்கொள்வதற்கான வாய்ப்பு விகிதம் என்ன?

[விடை $\frac{11}{36}$]

14. X, Y என்ற இரண்டு தொடர் மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. அம்மாறிகள் சார்புடையனவா, அல்லது சார்பிலாதனவா என்று கண்டுபிடி.

(i) $0 < x < 1$, $y > 0$ என்றால், $f(x, y) = \frac{2}{5}(x+2) \cdot e^{-y}$

(ii) x, y-ன் ஏனைய மதிப்புகளுக்கு, $f(x, y) = 0$

[விடை சார்பிலாதன]

15. (X, Y) எனும் இரு பரிமாண தொடர் மாறியின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு, $f(x, y) = K(1 + x + y)^{-n}$, $x > 0, y > 0, n > 2$ என்றால், K-ன் மதிப்பைக் காண்க.

மேலும் $P(Y \leq 3)$, $P(X + Y \geq 1)$ என்ற நிகழ்தகவுகளையும் கண்டுபிடி.

[விடை $K = (n-1)(n-2)$

$$P(Y \leq 3) = 1 - \frac{1}{4^{n-2}}$$

$$P(X + Y \geq 1) = (n-2)\, 2^{1-n} + 2^{2-n}$$]

16. (X, Y)-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, $f(x, y)$ வருமாறு. $x > 0$, $y > x$ என்றால், $f(x, y) = e^{-y}$. இப்பரவலின் விளிம்பு அடர்த்திச் சார்புகளையும், $P(X > 2/Y < 4)$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவின் மதிப்பையும் கணக்கிடு.

[விடை $g(x) = e^{-x}$, $h(y) = e^{-y} \cdot y$]

17. $0 \le x < 1$, $0 \le y < 1$ எனும்போது, $f(x, y) = (3x^2 y + 3y^2 x)$ என்றமையும் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை உடைய பரவலில்,

$$P\left[\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}\ \frac{1}{3} \le y \le \frac{2}{3}\right] = \frac{311}{1033}$$ என்று காட்டு.

18. $x = 0, 1, 2, \ldots$ என்றிருக்கும்போது $f(x) = e^{-2} \cdot \frac{2^x}{\angle x}$ என்று வரையறுக்கப்படும் அடர்த்திச் சார்பை உடைய நிகழ்தகவுப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

[விடை $e^2(e^t - 1)$]

19. x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$ என்ற சார்பை, அடர்த்திச் சார்பாக உடைய நிகழ்தகவுப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு என்ன ?

[விடை $e^{(2t+t^2)}$]

20. $e^{-|t|}$ என்ற சார்பை சிறப்பியல்புச் சார்பாகக் கொண்ட ஒரு தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவலின் அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ என்று நிறுவு. (இங்கு $-\infty < x < \infty$ என்பது x-ன் வீச் செல்லையாகும்).

21. ஒரு தொடர் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு, $\phi(t)$-ன் மதிப்பு $\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)$ என்று கொடுக்கப்பட்டால் அதன் அடர்த்திச் சார்பு என்ன ?

$$\left[\text{விடை}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]$$

22. X எனும் மிகை தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = A \cdot e^{-x}$ என்றால், A-ன் மதிப்பையும், $E(x)$, μ_r ஆகியவற்றையும் கண்டுபிடி.

23. $f(x) = cx^{\alpha} \cdot e^{-x}$; $x \geq 0$ என்பது X என்ற தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில், அதன் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், மாறுபாட்டையும் காண்க. C-ன் மதிப்பு என்ன ?

24. X என்பது ஒரு தொடர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை உடைய ஒரு சரிசம வாய்ப்பு மாறி என்றும், X-ன் மதிப்பு x-ஐ விட சிறியதாகவோ அல்லது x-க்குச் சமமாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $F(X)$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், $F(X)$ என்பது, $(0, 1)$ என்ற வீச்சில், செவ்வகப் பரவலையுடைய ஒரு சரிசம வாய்ப்பு மாறி எனக் காட்டு.

25. $dP = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^{n-1} \cdot dx$, $(0 < x < \infty)$ என்ற நிகழ்தகவு வகையீட்டை உடைய பரவலில்,

$$\mu'_1 = \sqrt{2}\,\frac{\mu\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\mu\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad \mu'_2 = n$$ என்று நிறுவுக.

5. தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவல்கள்

(CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

5·1 இயல்நிலைப் பரவல் (Normal Distribution)

5·1-1. வரையறை X எனும் சரிசம வாய்ப்பு மாறி, $-\infty < x < \infty$ என்ற முடிவிலா இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஏற்கும் எனக் கொள்வோம். இந்த இடைவெளியில், அம் மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

என்று இருந்தால், பின் X-ன் பரவலை ஒரு "இயல்நிலைப் பரவல்" என்றும், X-ஐ "இயல்நிலை மாறி" (Normal Variate) என்றும் கூறுகிறோம்.

இங்கு μ, σ என்பன இயல்நிலைப் பரவலின் துணை அலகுகள் எனப்படும். ஆகையால், இப்பரவலை $N(\mu, \sigma^2)$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுதல் வழக்கம். மேலும் μ, σ என்ற துணை அலகுகளின் மதிப்புகள்.

$-\infty < \mu < \infty, \ \sigma > 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு அமைந்திருக்க வேண்டும்.

$y = f(x)$ எனும் தொடர் வளைவரை, "இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரை" என்று அழைக்கப்படும். இவ்வளைவரை சமச்சீரானதாக இருக்கும். இதன் பண்புகளைப் பற்றி பின்னர் எடுத்து விளக்கலாம்.

5·1-2. திட்டமாக்கப்பட்ட அல்லது தரமாக்கப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவல்: X என்ற இயல்நிலை மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

என்று தெரியும்.

இதில் $t = \frac{X - \mu}{\sigma}$ என்றிடுவோமானால், இயல்நிலைப் பரவல் $N(0, 1)$ என்று மாறும். இப்பரவலை "திட்டமாக்கப் பட்ட இயல்நிலைப் பரவல்" (Standardized Normal Distribution) என்றும், t-ஐ "திட்டமாக்கப்பட்ட இயல்நிலை மாறி" என்றும் கூறுவர்.

இங்கு t-ன் அடர்த்திச் சார்பு, $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$ என்றாகும்.

எனவே $y = \phi(t)$ என்பது இயல்நிலை வளைவரையைக் குறிக்கும்.

5·1-3. இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகள் : X என்ற இயல்நிலை மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$ என்றிருக்கட்டும்.

(அ) இங்கு $f(x)$ என்பது t-ல் ஒரு அடுக்குக்குறிச் சார்பாக இருப்பதால் $f(x)$-ன் மதிப்பு எப்பொழுதும் மிகை எண்ணாகவே இருக்கும். அதாவது $-\infty < x < \infty$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் X-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒப்ப $f(x) \geq 0$ என்று இருக்கும்.

(ஆ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ என்று நிறுவலாம்.

இப்பொழுது, $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \cdot dx$$

இத் தொகையில், $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ என்றிட, $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma}$ என்றாகும். மேலும் $x \to \pm\infty$ எனும் போது, t-ம் $\pm\infty$-ஐ அணுகும்.

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot (\sqrt{2}\,\sigma\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] \quad \left(\because \int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$= 1$$

இவ்வாறு $f(x)$, நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு இருக்கிறது என்று அறிகிறோம்.

(இ) X-ன் எதிர்நோக்கல்

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx;$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [(x - \mu) + \mu] f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x)\, dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= I_1 + \mu \cdot 1 \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \right)$$

$$\therefore \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \cdot dx$$

இங்கு $t = \dfrac{x - \mu}{\sqrt{2}\,\sigma}$ என்றிட, $\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot dt = dx$ என்றாகும்.

ஆகையால் $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\,\sigma \cdot t \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\,\sigma\, dt$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \int_{t=-\infty}^{t=\infty} e^{-t^2}\, d(-t^2)$$

$$= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-t^2} \right]_{t=-\infty}^{t=\infty} = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே, $E(X) = 0 + \mu = \mu$

அதாவது, இயல் நிலைப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $= \mu$.

(ஈ) **திட்ட விலக்கம்**

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [(x - \mu) + \mu]^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [(x-\mu)^2 + 2\mu (x-\mu) + \mu^2]\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

$$+ 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x)\, dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

ஆனால், $\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x)\, dx = 0$ என்றும்,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ என்றும் பார்த்தோம்.

மேலும், $\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx = \mu_2$, என்க.

$$\therefore \quad E(X^2) = \mu_2 + 2\mu(0) + \mu^2$$
$$= \mu_2 + \mu^2$$

எனவே, X-ன் மாறுபாடு $= E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \mu_2 + \mu^2 - \mu^2 = \mu_2$$

i e, $\sigma^2 = \mu_2$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $= \sigma$

குறிப்பு: X-ன் மாறுபாடு $= E[(X-\mu)^2]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

இத்தொகையைக்காண, அதன் மதிப்பு σ^2 என்று கிடைக்கும்.

2. கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

X-ன் கூட்டுச்சராசரி விலக்கம்

$$= E[\,|X-\mu|\,]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu| \cdot f(x)\, dx$$

$$\text{i.e., } I = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x-\mu \right| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \cdot dx$$

இங்கு $\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot t = (x-\mu)$ என்றிட, $\sqrt{2}\,\sigma\, dt = dx$ என்று கிடைக்கும்.

$$\therefore\ I = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\cdot\sigma\cdot |t|\, e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\cdot\sigma\cdot dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |t|\, e^{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma \cdot \left[\int_{-\infty}^{0} (-t)\, e^{-t^2}\, dt + \int_{0}^{\infty} (t)\, e^{-t^2}\, dt \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma \cdot \left[2 \int_0^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma \int_{t=0}^{t=\infty} \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot e^{-t^2} \cdot d(-t^2)$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-t^2} \right]_{t=0}^{t=0}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} [\, 0 - 1\,] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma$$

எனவே கூட்டுச்சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}\sigma$, தோராயமாக.

(ஊ) உயர்படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Higher order Moments)

ஒற்றைப்படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$= E\,[\,(X - \mu)^{2n+1}\,]\,;\ (n \text{ ஏதேனும் மிகை முழு எண்})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2n+1} \cdot f(x) \cdot dx.$$

$$i.e.,\ \mu_{2n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2n+1} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \cdot dx$$

இதில் $\sqrt{2\sigma}\, t = (x - \mu)$ என்றிட,

$$\mu_{2n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\,\sigma t)^{2n+1} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\,\sigma\, dt$$

என்று மாறும்.

$$= \frac{(\sqrt{2\sigma})^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1} \cdot e^{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{(\sqrt{2\sigma})^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} t^{2n+1} \cdot e^{-t^2}\, dt + \int_{0}^{\infty} t^{2n+1} \cdot e^{-t^2}\, dt \right]$$

$$= \frac{(\sqrt{2\sigma})^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int_{0}^{\infty} (-t^{2n+1})\, e^{-t^2}\, dt + \int_{0}^{\infty} t^{2n+1} \cdot e^{-t^2}\, dt \right]$$

$$= \frac{(\sqrt{2\sigma})^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} [0] = 0$$

இவ்வாறு, ஒற்றைப்படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் எல்லாம் பூஜ்யமாக இருக்கும் என்று அறிகிறோம்.

இரட்டைப்படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகை $= \mu_{2n}$, n ஏதேனும் மிகை முழு எண்.

$$\therefore \quad \mu_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2n} \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2n} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \cdot dx$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot t)^{2n} \cdot e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\sigma\, dt \cdot (\because \sqrt{2}\cdot\sigma\cdot t = x-\mu)$$

$$= \frac{(\sqrt{2}\sigma)^{2n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} \cdot e^{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{(\sqrt{2}\,\sigma)^{2n}}{\sqrt{\pi}} \int_{t=-\infty}^{t=\infty} t^{2n-1} \cdot e^{-t^2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) d(-t^2)$$

$$= \frac{-(\sqrt{2}\,\sigma)^{2n}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_{t=-\infty}^{t=\infty} t^{2n-1} \cdot d(e^{-t^2})$$

$$= \frac{-(\sqrt{2}\,\sigma)^{2n}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \left[t^{2n-1} \cdot e^{-t^2}\right]_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{t=-\infty}^{t=\infty} e^{-t^2} \cdot d(t^{2n-1}) \right\}$$

$$i.e., \quad \mu_{2n} = -\frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ [0] - (2n-1) \int_{t=-\infty}^{t=\infty} e^{-t^2} \cdot t^{2n-2} \cdot dt \right\}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}\,\sigma)^{2n}}{2\sqrt{\pi}} (2n-1) \cdot \int_{t=-\infty}^{t=\infty} e^{-t^2} \cdot t^{2n-2} \cdot dt.$$

$i.e., \quad \mu_{2n} = (2n-1) \cdot \sigma^2 \cdot \mu_{2n-2}$ என்றாகும்.

$111^{rly}\ \mu_{2n-2} = (2n-3)\,\sigma^2 \cdot \mu_{2n-4}$ என்று நிறுவலாம்.

இவ்வாறு,

$$\mu_{2n-4} = (2n-5)\,\sigma^2 \cdot \mu_{2n-6}$$

... ...

... ...

$$\mu_4 = 3 \cdot \sigma^2 \cdot \mu_2$$

$$\mu_2 = 1 \cdot \sigma^2$$

எனவே, $\mu_{2n} = (2n-1) \quad (2n-3) \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1. \quad (\sigma^2)^n$ என்றாகும்.

இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், வெவ்வேறு இரட்டைப்படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கணக்கிடலாம். இதிலிருந்து,

$$\mu_4 = 3\,\sigma^2 \cdot \mu_2 = 3\,\sigma^2\,\sigma^2 = 3\,\sigma^4$$

$$\therefore \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} = \frac{3\,\sigma^4}{(\sigma^2)^2} = 3$$

$111^{rly}\ \gamma_r = \beta_2 - 3 = 0$

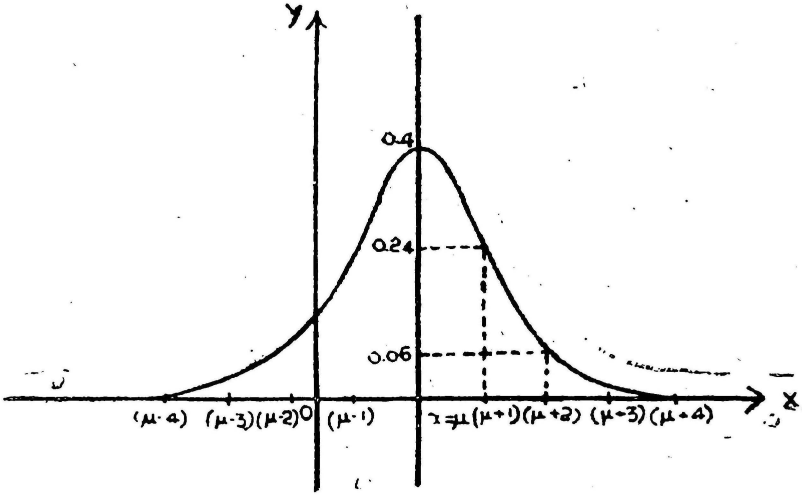
5·1-4 இயல்நிலை வளைவரையின் பண்புகள் : X எனும் இயல் நிலை மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}; \quad -\infty < x < \infty$$

ஆகையால் இயல் நிலை வளைவரையின் சமன்பாடு,

$y = f(x)$ என்பதாகும்.

$$i.e., \quad y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$



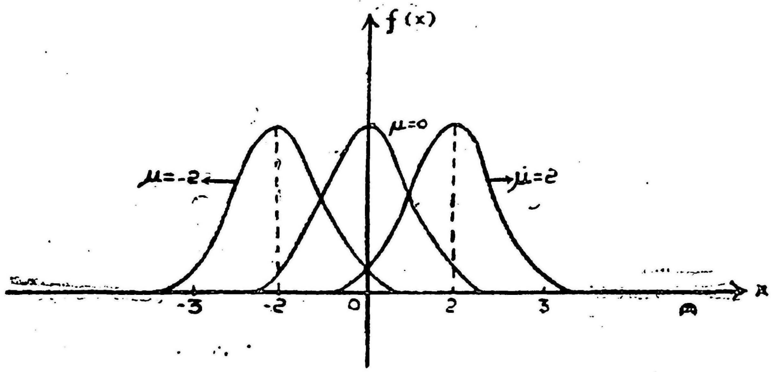
படம் 9. இயல்நிலை (அடர்த்தி சார்பு) வளைவரை

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து, இயல்நிலை வளைவரை $x = \mu$ என்ற நேர்கோட்டைப் பொறுத்து சமச்சீருடையதாக இருக்கும் என்று தெரிகிறது. மேலும் y-ன் மதிப்பு எப்பொழுதும் மிகையாகவே இருக்கும் என்றும், $x=\mu$ எனும்போது அது மீப்பெரும் மதிப்பை அடையும் என்றும், அறிகிறோம். x-ன் மதிப்பு எண்ணளவில் அதிகரிக்கும்போது, y-ன் மதிப்பு வேகமாக குறைந்து கொண்டே வந்து; இறுதியாக, இரண்டு திசைகளிலும் x முடிவிலியை அணுகும்போது y பூஜ்யத்தை அணுகும் என்று நன்கு விளங்கும்

அதாவது: X-அச்சு இவ்வளைவரையின் அணுகுகோடாக (அல்லது தொலைத்தொடு கோடாக) அமைகிறது என்று அறிகிறோம்.

$x=\mu$ என்ற புள்ளியில் வளைவரை கீழ்நோக்கி குழிவாக உள்ளது. மேலும். $x=\mu+\sigma$, $x=\mu-\sigma$ என்பவை இவ்வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் என்று நுண்கணிதத்தின்மூலம் அறியலாம். அதாவது இவ்விரண்டு புள்ளிகளிலும், வளைவரையின் குழிவுத்தன்மை மாறுகிறது என்று பொருளாகும்.

மேலேயுள்ள வரை படத்தில் இப்பண்புகளை விளக்கிக் காட்டியுள்ளோம். பின்வரும் படங்கள் இரண்டும், μ, σ இவற்றின் மதிப்புகள் மாறும்போது, y-ல் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் காட்டுகின்றன. இப்படங்களிலிருந்து, திட்டவிலக்கம், σ-ன் மதிப்பு அதிகரிக்குமானால், வளைவரை தட்டையாகிக் கொண்டு வரும் என்றும், மாறாக σ-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாக இருந்தால், வளைவரை முனையுடையதாக அமையும் என்றும், σ-ன் மதிப்பை நிலையாக வைத்துக்கொண்டு, μ-ன் மதிப்பை மாற்றுவோமானால் வளைவரை இடம் பெயர்ந்திருக்குமே தவிர, உருவம் ஒன்றாகவே இருக்கும் என்றும் விளங்கும்.

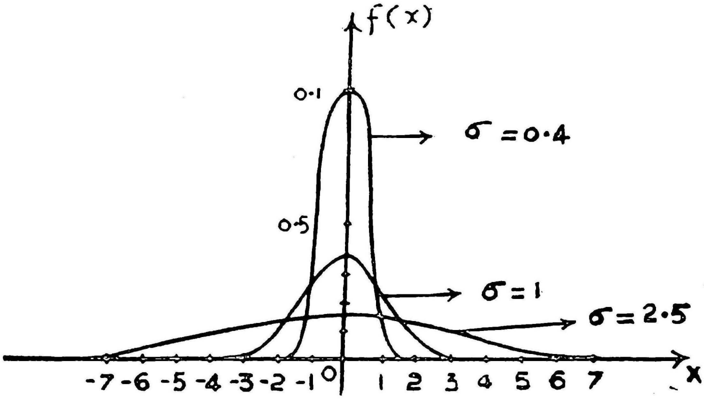


படம் 10. இயல்நிலை வளைவரைகள் :- $\sigma=1$

இயல்நிலை வளைவரையை $x=\mu$ என்ற குத்துக்கோடு இரு சமபாகங்களாக பிரிப்பதால், இயல் நிலைப்பரவலின் முகடு, இடைநிலை மதிப்பு, கூட்டுச்சராசரி ஆகிய மூன்றும் ஒரே புள்ளியில் அமைகின்றன.

5·1-5 இயல்நிலை வளைவரையின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் y-ஆயக்கூறு காணும் முறை: இங்கு திட்டமாக்கப்பட்ட இயல் நிலைப்பரவலை

எடுத்துக் கொள்வோம். ஆகையால் இயல்நிலை வளைவரையின் திட்டவடிவச் சமன்பாடு $y = \phi(t)$ என்பதாகும்.



படம் 11. இயல்நிலை வளைவரைகள் :- $\mu = 0$

அதாவது, $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ என்று தெரியும்.

இத்தொடர்பில் t-க்கு வெவ்வேறு மிகை மதிப்புகள் கொடுக்கக் கிடைக்கப்பெறும் $\phi(t)$-ன் பல்வேறு மதிப்புகளையும் கணக்கிட்டு அட்டவணைப் படுத்தியுள்ளனர். இந்த அட்டவணை புத்தகத்தின் இறுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது இந்த அட்டவணையிலிருந்து t-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கிணங்க, y-ன் மதிப்பைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

உதாரணமாக $t = 0.54$ எனில், $y = 0.3448$ என்றும்,

$t = 3.06$ எனில், $y = 0.0037$ என்றும் அறியலாம்.

அட்டவணையில் குறிப்பிடப்படாத ஏனைய t-ன் மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப, y-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட இடைச்செருகல் (Interpolation) முறையைப் பின்பற்ற வேண்டும்.

அட்டவணையிலிருந்து, t-ன் மதிப்பு அதிகரிக்குமானால், y-ன் மதிப்பு மிக வேகமாகக் குறைந்து செல்லும் என்றும், t-ன் மதிப்பு நான்கை அணுகும்போதே, y பூஜ்யத்தை அணுகும் என்றும் அறியலாம்.

5.1-6 இயல் நிலை வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு காணுதல்: இயல்நிலை வரையின் சமன்பாட்டை $y = f(x)$ என்று எடுத்துக்

கொண்டால், இவ்வளை வரைக்கும், $x=a$, $x=b$, X-அச்சு ஆகிய கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு, x-ன் மதிப்பு (a, b) என்ற இடை வெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்கும் என்று பார்த்துள்ளோம். அதாவது,

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx \text{ என்று தெரியும்.}$$

இதேபோன்று, X-ன் மதிப்பு μ-க்கும், குறிப்பிட்ட மதிப்பாகிய x-க்கும் இடையே அமைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P[\mu < X < x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\mu^x e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx \text{ என்றாகும்}$$

இதில் $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ என்றிட, தேவையான நிகழ்தகவு

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

வலது புறமுள்ள வரையறுத்த தொகையீட்டினால் கொடுக்கப்படும் P-ன் மதிப்பு "நிகழ்தகவு தொகையீடு" (Probability Integral) அல்லது "பிழைச்சார்பு" என்று அழைப்பதுண்டு.

இங்கு t-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப கிடைக்கும் P-ன் மதிப்புகளை; அதாவது குறிப்பிட்ட இடை வெளிகளுக்குள் அமையும் இயல்நிலை வளைவரைக்குட்பட்ட பல்வேறு பரப்புகளை; கணக்கிட்டு அட்டவணைப் படுத்தியுள்ளனர். (அட்டவணை புத்தகத்தின் இறுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).

அந்த அட்டவணையிலிருந்து

$$P[0 < t < 1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0{\cdot}3413 \text{ என்று காண}$$

லாம்.

$\therefore \quad P[-1 < t < 1] = 2 \times 0{\cdot}3413 = 0{\cdot}6826$ என்று கிடைக்கும்.

இது $x=-\sigma$, $x=\sigma$ என்ற இடைவெளிக்குள் அமையும், வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பாகும். கீழே வரைந்துள்ள படத்தில் $MA\gamma A'M'$-ன் பரப்பை இம்மதிப்பு குறிக்கும்.

ஆகையால் $x = -\sigma, x = \sigma$ என்ற இடைவெளிக்கு வெளியே வளைவரைக்குக் கீழ் அமையும் பரப்பு $= 1 - 0{\cdot}6826 = 0{\cdot}3174$ என்றாகும். அதாவது, t என்ற இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு, கூட்டுச் சராசரி μ-க்கும் திட்டவிலக்கம் σ-க்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தைவிட அதிகமாக விலகியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பை இது குறிக்கும்.

$$i.e., \quad P[\,|t| > 1\,] = 1 - P[\,|t| \leq 1\,] = 0{\cdot}3174.$$

கீழ்காணும் படத்தில் AM என்ற குத்துக்கோட்டிற்கு வலது புறமும், $A'M'$-க்கு இடது புறமும் அமைந்துள்ள வளை வரைக்குட்பட்ட பரப்பை இம்மதிப்பு குறிக்கின்றது என அறியலாம். இது மொத்த பரப்பில் மூன்றில் ஒரு பங்கைவிட குறைவு என்பது குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

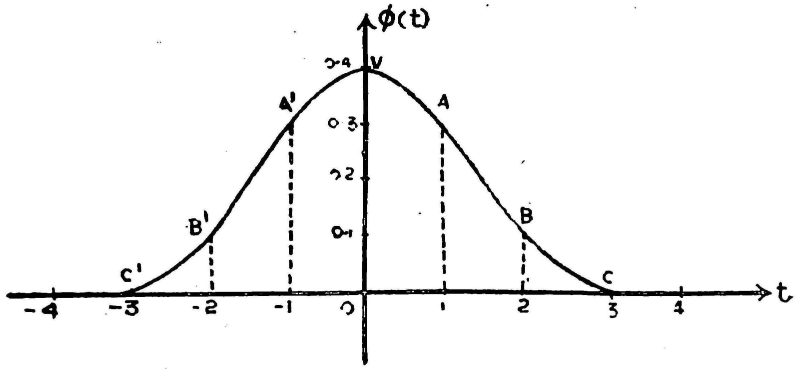
இதேபோன்று t-ன் மதிப்பு, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து (2σ)-ஐ விட அதிகமாக விலகியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P[\,|t| > 2] = 1 - P[\,|t| \leq 2]$$

$$= 1 - 2 \times 0{\cdot}4772 = 0{\cdot}0456 \text{ என்பதாம்.}$$

இது மொத்த பரப்பில், ஏறக்குறைய $4\frac{1}{2}$ % என்று அறியலாம்.

இவ்வாறே, $P[\,|t| > 3] = 0{\cdot}0027$ என்று கிடைக்கும். அதாவது 1000 நிகழ்ச்சிகளுள், ஏறக்குறைய 3 நிகழ்ச்சிகளில் t-ன் மதிப்பு கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து 3σ-ஐ விட அதிகமாக விலகி இருக்கும் என்று பொருளாகும்.



படம் 12. இயல்நிலை வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு

இப்படத்தில், $t = 1, t = 2, t = -1, t = -2$ என்ற குத்துக்கோடுகள் வளைவரையை முறையே A, B, A', B' என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

இங்கு,

$MAVO$-ன் பரப்பு $= 0{\cdot}3413$ ச.அலகு $= OVA'M'$-ன் பரப்பு

$NBAM$-ன் பரப்பு $= 0{\cdot}1359$ ச அலகு $= M'A'B'N'$-ன் பரப்பு

$CBNC$-ன் பரப்பு $= 0{\cdot}0215$ ச.அலகு $= N'B'C'N,$-ன் பரப்பு

5·1-7 விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு. இயல்நிலைப் பரவலின் அடர்த்திச் சார்பு,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

ஆகையால், ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு $M(t)$ என்றால்,

$$M(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\mu+\sigma z)} \cdot$$

$$e^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)} \cdot \sigma \, dz \,; \quad \left(\frac{x-\mu}{\sigma} = z \text{ எனில்}\right)$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[z^2 - 2t\sigma z]} \cdot dz$$

$$= \frac{e^{\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2} dz$$

$$= \frac{e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$\left[\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}\right]$$

$$= e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$$

இதிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி μ-ஐ மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

அதாவது, $M_{\mu}(t) = E\left[e^{t(X-\mu)}\right]$

$$= E[e^{tx}] \cdot E\left[e^{-\mu t}\right]$$

$$= e^{-\mu t} \cdot E[e^{tx}]$$

$$= e^{-\mu t} \cdot M(t)$$

$$= e^{-\mu t} \cdot e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$= e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

இந்த அடுக்குக்குறிச் சார்பை விரித்து எழுதுவோமானல்,

$$M_{\mu}(t) = 1 + \frac{1}{\angle 1}\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) + \frac{1}{\angle 2}\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{\angle 3}\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^3 + \ldots\ldots \to \infty$$

$$i.e., \quad M\mu(t) = 1 + \frac{1}{\angle 1}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) t^2 + \frac{1}{\angle 2}\cdot\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \cdot t^4 + \frac{1}{\angle 3}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^3 \cdot t^6 + \ldots\ldots$$

ஆகையால்,

$$\mu_{2n+1} = \frac{t^{2n+1}}{\underline{|2n+1}} \text{-ன் குணகம்}$$

$= 0$ [$\because$ $M\mu(t)$-ன் விரிவில் t-ன் படிகள் இரட்டை எண்களாகவே உள்ளன.]

11^{rly} $\mu_{2n} = \frac{t^{2n}}{\angle 2n}$ -ன் குணகம்

$$= \frac{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^n}{\angle n} \cdot \angle 2n$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{2^n \cdot \angle n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (2n-2)(2n-1)(2n)$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{2^n \cdot \angle n} [2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (2n-2)(2n)] \times [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)]$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{2^n \cdot \angle n} (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n) \cdot 2^n \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)]$$

$$= \sigma^{2n} \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)]$$

5·1-8 குவிவுச் சார்பு இயல் நிலைப்பரவலின் குவிவுச் சார்பு $k(t)$ என்றால்,

$$k(t) = \log M(t)$$

$$= \log \left[e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)} \right]$$

$$= \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

ஆகையால் $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots$ என்பன இயல் நிலைப்பரவலின் குவிவுகள் என்றால்,

$k_1 = \mu$, $k_2 = \sigma^2$ என்றும், ஏனைய குவிவுகளெல்லாம் பூஜ்யத்திற்குச் சமம் என்றும் தெரிகிறது.

5·1-9 இயல்நிலைப் பரவலின் சிறப்புப் பண்புகள் : பின்வரும் தேற்றங்கள் இயல் நிலைப்பரவலுக்கே உரித்தான சில பண்புகளை விளக்குவனவாக உள்ளன.

5·1-9 (a) தேற்றம் 1. X என்ற இயல்நிலை மாறியின் பரவல் $N(\mu, \sigma^2)$ என்றால் $Y = ax + b$ என்பதும் ஒரு இயல்நிலைமாறியாக இருக்கும். அதன் பரவல் $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ என்றிருக்கும்.

நிரூபணம்

$Y = ax + b$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்,

$E\ (Y) = aE(x) + b = a\mu + b$ என்றும்,

$\text{Var}\ (Y) = a^2\ \text{Var}\ (X) = a^2\ \sigma^2$ என்றும் கிடைக்கும்.

மேலும் a-ன் அடையாளத்தைப் பொறுத்து, $Y = ax + b$ என்பது ஒரு கூடும் சார்பாகவோ, அல்லது குறையும் சார்பாக வோ இருக்கும். எனவே Y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை $g\ (y)$ என்று குறிப்பிடுவோமானுல்,

$$g\ (y) = \frac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]} \cdot \frac{1}{|\,a\,|}$$

என்றிருக்கும்,

$$= \frac{1}{|\,a\,|\ \sigma\ \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2\ a^2}\right)[\,y - (a\mu + b\,)\,]^2}.$$

ஆகையால், $g\ (y)$ ஐ நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக உடைய பரவல் $N\,(a\mu + b,\ a^2\ \sigma^2)$ என்று நன்கு விளங்கும். அதாவது y-ன் பரவலும் ஒரு இயல்நிலைப் பரவல் என்று அறி கிறோம்.

துணை முடிவு

$t = \dfrac{X - Y}{\sigma}$ என்ற மாறியின் பரவல் $N\,(0,\ 1)$ என்ற இயல் நிலைப் பரவல் என்று அறிகிறோம். இங்கு t-ஐ "திட்டமாக்கப்பட்ட மாறி" என்று கூறுவதுண்டு.

5·1-9 (b) தேற்றம் 2. X, Y என்பன இரண்டு சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகள் என்றும், அவற்றின் பரவல்கள் $N\,(\mu_x,\ \sigma_x^2)$; $N\,(\mu_y,\ \sigma_y^2)$ என்றும் இருந்தால், பின், $Z = X + Y$ என்பது $N\,(\mu_x + \mu_y,\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ என்ற பரவலை உடைய ஒரு இயல்நிலை மாறியாகும்.

நிரூபணம் :

$$Z = X + Y$$

$$\therefore \quad E(Z) = E(X) + E(Y) = \mu_x + \mu_y$$

111rly Var (Z) = Var (X) + Var (Y) = $\sigma_x^2 \sigma_y^2$.

மேலும், X, Y, Z என்ற மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்புகளை முறையே $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$ என்று குறிப்பிட்டால், பின் X, Y சார்பிலா மாறிகளாதலின், $M_z(t) = M_x(t) \cdot M_y(t)$ என்று தெரியும்.

$$i.e., M_z(t) = e^{\left(\mu_x \cdot t + \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}\right)} \cdot e^{\left(\mu_y \cdot t + \frac{\sigma_y^2 \cdot t^2}{2}\right)}$$

$$= e^{\left[(\mu_x + \mu_y) t + \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) t^2\right]}$$

இச்சார்பு, $(\mu_x + \mu_y)$-ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும், $(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)$-ஐ மாறுபாடாகவும் உடைய பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு என்று தெரிகிறது. எனவே Z-ம் ஒரு இயல்நிலை மாறி என்று அறிகிறோம். அதாவது, Z-ன் பரவல், $N[(\mu_x + \mu_y), (\sigma_x + \sigma_y^2)]$ என்ற இயல்நிலைப் பரவல் என்பதாம்.

குறிப்பு : (*i*) இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மை என நிறுவலாம்.

(*ii*) $Z = X - Y$ என்பதும் $N(\mu_x - \mu_y, \sigma_{x^2} + \sigma_y^2)$ என்ற பரவலையுடைய ஒரு இயல்நிலை மாறியாகும்.

(*iii*) இத்தேற்றத்தை பல சார்பிலா மாறிகளின் கூடுதலுக்கும் விரித்துக் கூறலாம். இதை பின்வரும் பொதுத் தேற்றமாகக் கூறலாம்.

5·1-9 தேற்றம் 3. $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_n$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலா n இயல்நிலை மாறிகள் என்றும், $C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_n$ என்பன n மாறிலிகள் என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், பின்

15

$Z = \sum_{i=1}^{n} C_i \; X_i$ என்பதும் ஒரு இயல்நிலை மாறியாகும். Z-ன் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $\sum_{i=1}^{n} C_i \, \mu_i$ என்றும் மாறுபாடு $\sum_{i=1}^{n} C_i^2 \, \sigma_i^2$ என்றும் இருக்கும். (இங்கு X_i பரவலின் கூட்டுச்சராசரி μ எனவும், மாறுபாடு σ_i^2 எனறும் கொள்ள வேண்டும்.)

இத்தேற்றத்திலிருந்து பின்வரும் முக்கிய முடிவு கிடைக்கப் பெறும்.

துணை முடிவு

இங்கு $\mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots\ldots = \mu_n = \mu$ என்றும்,
$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots\ldots\ldots = \sigma_n = \sigma$ என்றும்,

$C_1 = C_2 = \ldots\ldots\ldots = C_n = \frac{1}{n}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோமானால், பின் $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$ என்பன n சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகளாயின், $X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_n)$ என்பதும் ஒரு இயல்நிலை மாறியாகும். X-பரவலின் கூட்டுச் சராசரி μ என்றும், மாறுபாடு $\frac{(\sigma^2)}{n}$ என்றும் இருக்கும்.

அதாவது, n சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகளின் சராசரியும் ஒரு இயல்நிலை மாறி என்று தெரிகிறது. மேலும் அம்மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் சமமாகவும், மாறுபாடுகள் சமமாகவும் இருந்தால், தேவயான மாறியின் கூட்டுச் சராசரியும், கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுச் சராசரிக்குச் சமமாகவும், அதன் மாறுபாடு, கொடுக்கப் பட்ட மாறுபாட்டின் $\frac{1}{n}$ மடங்குக்குச் சமமாகவும் இருக்கும்.

குறிப்பு: இதுகாறும் பார்த்த தேற்றங்களை, சிறப்பியல்புச் சார்புகளைப் பயன்படுத்தியும் நிரூபிக்கலாம்.

5·2. ஹேகனின் எடுகோளும் காஸின் பிழை விதியும் (Hagen's Hypothesis and Gaus's Error Law)

(அ) ஹேகனின் எடுகோள்: புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்குங்கால், அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட பரிசோதனையைச்

செய்யுங்கால், நமக்குத் தெரியாமலேயே ஏதேனும் சிறு தவறுகள் ஏற்பட வாய்ப்பு உண்டு. அத்தகைய சிறு தவறுகள் பலவற்றின் கூட்டு விளைவின் காரணமாக, இறுதியாக கிடைக்கும் முடிவுகளில் சிறிய பிழைகள் ஏற்படக்கூடும். இவ்விதம் ஏற்படும் பிழைகளைப் பற்றிய ஹேகன் என்பவரின் எடுகோள் பின்வருமாறு :

(i) ஒரு பரிசோதனையின்போது கண்டறிந்த எந்த ஒரு பிழையும், ஏறக்குறைய சம அளவுடைய பல சிறிய பிழைகளின் மொத்த விளைவாக இருக்கும்.

(ii) மிகைப் பிழை ஏற்படுவதற்கான வாய்ப்பும், குறைப் பிழை ஏற்படுவதற்கான வாய்ப்பும் சமமாகவே இருக்கும்.

(iii) பெரிய பிழை இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு சிறியதாகவும், சிறிய பிழை இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு பெரியதாகவும், பிழையே இல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு பூஜ்யமாகவும் இருக்கும்.

இந்த எடுகோள்களின் அடிப்படையில் பின்வரும் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

(ஆ) தேற்றம் : காஸின் பிழை விதி

கண்டறிந்த பிழைகள் அனைத்தும் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலை உருவாக்கும்.

நிரூபணம்

ஒரு குறிப்பிட்ட பரிசோதனையைச் செய்யும்போது ஏற்படக்கூடிய சிறிய பிழைகளின் அளவுகள் ஒவ்வொன்றையும் $\in$ எனக் கொள்வோம். இத்தகைய சிறிய பிழைகள் எல்லாவற்றின் மொத்த விளைவாக அமையும் பிழையை x என்று குறிப்பிடுவோம். பிழைகளின் மொத்த எண்ணிக்கையை n என்றும், அவற்றுள் மிகைப் பிழைகளின் எண்ணிக்கையை m என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். இதிலிருந்து குறைபிழைகளின் எண்ணிக்கை $(n-m)$ என்று அறியலாம்.

$$\therefore \quad x = m\in + (n-m)(-\in)$$

$$= (2m-n)\in,$$

$$i.e., \quad \frac{x}{\in} = (2m-n); \quad i.e., \quad m = \frac{n}{2} + \frac{x}{2\in}$$

மேலும் $P(\in) = P(-\in) = \frac{1}{2}$ என்று தெரியும்.

ஆகையால் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பயன்படுத்த,

$$P(x) = \frac{\angle n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}}{\angle m \cdot \lfloor\underline{n-m}}$$

$$= \frac{\angle n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\lfloor\underline{\frac{n}{2} + \frac{x}{2\in}} \; \lfloor\underline{\frac{n}{2} - \frac{x}{2\in}}} \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$

m-ன் மதிப்பு $(m+1)$ என்று அதிகரிக்கும்போது, x-ன் மதிப்பு $(x + \Delta x)$ என மாறுவதாகக் கொள்வோம்.

ஆகையால், $m + 1 = \frac{n}{2} + \frac{x + \Delta x}{2\in}$

அதாவது, $\frac{n}{2} + \frac{x}{2\in} + 1 = \frac{n}{2} + \frac{x}{2\in} + \frac{\Delta x}{2\in}$

எனவே, $\frac{\Delta x}{2\in} = 1$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது, $\Delta x = 2\in$

மேலும் $$P(x + \Delta x) = \frac{\lfloor\underline{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\lfloor\underline{\frac{n}{2} + \frac{x+\Delta x}{2\in}} \cdot \lfloor\underline{\frac{n}{2} - \frac{x+\Delta x}{2\in}}}$$

[(1) -லிருந்து]

$$= \frac{\lfloor\underline{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\lfloor\underline{\frac{n}{2} + \frac{x}{2\in} + 1} \cdot \lfloor\underline{\frac{n}{2} - \frac{x}{2\in} - 1}}$$

$$\therefore \quad \frac{P(x+\triangle x)}{P(x)} = \frac{\left(\frac{n}{2}-\frac{x}{2\in}\right)}{\left(\frac{n}{2}+\frac{x}{2\in}+1\right)} = \frac{(n\in - x)}{(n\in + x + 2\in)}$$

$$i.e., \frac{P(x+\triangle x)}{P(x)} - 1 = \frac{(n\in - x)}{(n\in + x + 2\in)} - 1$$

$$i.e., \frac{P(x+\triangle x) - P(x)}{P(x)} = \frac{-2(x+\in)}{(n\in + x + 2\in)}$$

$$i.e., \frac{1}{P(x)} \cdot \left[\frac{P(x+\triangle x) - P(x)}{\triangle x}\right] = \frac{-2(x+\in)}{\triangle x\,(n\in + x + 2\in)}$$

$$= \frac{-2(x+\in)}{2\in\,(n\in + x + 2\in)} \quad (\because \triangle x = 2\in)$$

$$i.e., \frac{1}{P(x)} \cdot \left[\frac{P(x+\triangle x) - P(x)}{\triangle x}\right] = \frac{-(x+\in)}{(n\in^2 + x\in + 2\in^2)} \quad \ldots (2)$$

இப்பொழுது, $\in$-ன் மதிப்பு பூஜ்யத்தை அணுகும்போது n முடிவிலியை அணுகுவதாகக் கொள்வோம். மேலும் $n\in^2$-ன் எல்லை மதிப்பு ஒரு முடிவுடைய எண்ணாக இருக்கும் என்போம். அம்மதிப்பை $\left(\frac{1}{2h^2}\right)$ எனக் கருதுவோம். $\triangle x = 2\in$ என்றிருப்பதால், $\in$ பூஜ்யத்தை அணுகினால், $\triangle x$-ம் பூஜ்யத்தை அணுகும் என்று தெரிகிறது. ஆகையால் முடிவு (2) -லிருந்து,

$$\frac{1}{P(x)} \cdot \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \left[\frac{P(x+\triangle x) - P(x)}{x\triangle}\right]$$

$$= \underset{\in \to 0}{Lt} \left[\frac{-(x+\in)}{(n\in^2 + x\in + 2\in^2)}\right] \text{ என்று பெறலாம்.}$$

$$i.e., \frac{1}{P(x)} \cdot \frac{d}{dx}[P(x)] = \frac{-x}{\left(\frac{1}{2h^2}\right)} = -2h^2 x$$

இதன் இருபுறமும் x-ஐச் சார்ந்த தொகைகாண,

$$\int \frac{1}{P(x)} d[P(x)] = \int (-2h^2 x)\, dx + \log C$$ என்றாகும்.

இங்கு C என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலி.

$$i.e., \quad \log P(x) = -h^2 x^2 + \log C$$

$$= \log\left[C \cdot e^{-h^2 x^2}\right]$$

$$\therefore \quad P(x) = C \cdot e^{-h^2 x^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

ஆனால் $P(x)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக இருக்கவேண்டுமானால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\, dx = 1$$ என இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, $\int_{-\infty}^{\infty} C\, e^{-h^2 x^2}\, dx = 1$; $i.e.,\ C \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{h} = 1$; $i.e.,\ C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$

ஆகையால், $P(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}$ என்று கிடைக்கின்றது. இது ஒரு இயல் நிலைப்பரவலின் அடர்த்திச் சார்பாகும்.

இவ்வாறு, x-ன் பரவல் இயல் நிலையானது என்று அறிகிறோம்.

(இ) வரையறைகள்

(i) பிழைச் சார்பு (Error Function): ஒரு பிழையின் மதிப்பு $(-x, x)$ என்ற இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவை பிழைச் சார்பு என்று கூறுவர்.

இப்பொழுது, $P(-x \leq \in \leq x) = \int_{-x}^{x} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \cdot dx$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-h^2x^2} dx$$

$= \phi(yx)$ என்க.

பின் $\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-y^2} dy$ எனும் சார்பை பிழைச் சார்பு என்பர். இதை காஸின் பிழைச்சார்பு என்றும் கூறுவர். இச்சார்பை $E_r f(x)$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

கண்டறிதலின் பிழைக்கொள்கையில், பிழைகளின் இயல் நிலைப்பரவலை "காஸின் பிழைவிதி" என்று கூறுவர்,

(ii) நிகழ்த்தக்கபிழை (Probable Error) அல்லது கால்மானம் (Quartile): ஏதேனும் ஒருபிழை $(-r, r)$ என்ற இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ என்றிருக்குமானால், பின் r-ஐ நிகழத்தக்க பிழை என்று அழைப்பர். r-ன் மதிப்புப் பின்வருமாறு பெறப்படும்.

இங்கு $\int_{-r}^{r} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}$ என்று வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது.

இதில் $t = hx$ என்றிட,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{hr} e^{-t^2} \cdot dt$$ என்றாகும்.

$$= Er \cdot f(hr)$$

ஆனால், பிழைப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் σ எனில், பின் $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}h}$ என்று அறியலாம்.

$$\therefore \quad E_r f(hr) = E_r f\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

மேலும், பிழைச் சார்பின் மதிப்புகளடங்கிய அட்டவணையிலிருந்து,

$$hr = 0{\cdot}47694 \text{ என்று பெறலாம்.}$$

$$i.e., \frac{r}{\sqrt{2}\,\sigma} = 0{\cdot}47694; \quad i.e., \quad r = 0{\cdot}67449 \cdot \sigma$$

$$\therefore \quad \sigma = 1{\cdot}4826\, r \text{ என்றும் கிடைக்கும்.}$$

குறிப்பு : நிகழ்தகவு வளைவரைக்கும், X-அச்சுக்கும், $x = 0$, $x = r$ எனும் குத்துக்கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு $\frac{1}{4}$-க்குச் சமமாக இருக்குமாறு அமையும் r-ன் மதிப்பைத்தான் "நிகழத்தக்க பிழை," என்கிறோம்.

(iii) இடைநிலைப் பிழை (Mean Error) அல்லது சராசரி வர்க்கப் பிழை :

பிழைகளின் இயல்நிலைப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைச் சராசரி வர்க்கப் பிழை என்று கூறுகிறோம்.

அதாவது, சராசரி வர்க்கப் பிழை $= \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}h}$ என்று பெறலாம்.

(iv) கூட்டுச் சராசரிப் பிழை (Average Error)

பிழைகளின் இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி தனி விலக்கத்தைக் கூட்டுச் சராசரிப் பிழை என வரையறுக்கிறோம். இதை η என்று குறிப்பிடுவதுண்டு.

$$\therefore \quad \eta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \; e^{-h^2x^2} \, dx$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} (-x)\ e^{-h^2 x^2} dx + \int_{0}^{\infty} (x)\ e^{-h^2 x^2} dx \right]$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-h^2 x^2} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t}\ dt \quad (t = h^2 x^2 \text{ என்றிட})$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \% \quad i.e., \eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. கல்லூரி ஆண்டுத் தேர்வில், பொருளாதாரப் பட்டப் படிப்பு மாணவர்களுக்கு அளிக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி 78 என்றும், திட்ட விலக்கம் 10 என்றும் தெரிந்தால், (— 0·6), 1·2 என்ற திட்ட (தரமாக்கப்பட்ட) மாக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களை உடைய இரண்டு மாணவர்களின் உண்மையான மதிப்பெண்கள் என்ன ?

X எனும் மாறி மாணவர்களுக்கு அளிக்கப்பட்ட மதிப் பெண்களைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

மேலும் X என்பது ஒரு இயல்நிலைப் பரவலை உருவாக்கும் என்க.

X-ன் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியை t என்று குறிப்பிடுவோ மானால்,

பின் $t = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ என்றும் தெரியும். $i.e.,\ X = t\sigma + \mu$

இங்கு $\mu = 78$, $\sigma = 10$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

அடுத்து, $t_1 = -0{\cdot}6$, $t_2 = 1{\cdot}2$ என்ற திட்ட மதிப்புகளுக்கு ஒப்பான X-ன் மதிப்புகளை X_1 X_2 என்க.

$$\therefore \quad X_1 = t_1 \sigma + \mu = (-0{\cdot}6)\,10 + 78 = 72$$
$$X_2 = t_2 \sigma + \mu = 1{\cdot}2 \times 10 + 78 = 90$$

2. t எனும் திட்டமாக்கப்பட்ட இயல்நிலை மாறியின் கூட்டுச் சராசரி பூஜ்யம் என்றும், திட்டவிலக்கம் ஒன்று என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடி.

(*i*) $P(t \geq -1{\cdot}64)$; (*ii*) $P(|t| \leq 1{\cdot}96)$

இயல்நிலை வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு காண்பதற்கான அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

$$\begin{aligned}
(i)\quad P(t \geq -1{\cdot}64) &= P[-1{\cdot}64 \leq t \leq 0] + P[t \geq 0] \\
&= P[0 \leq t \leq 1{\cdot}64] + P[t \geq 0] \\
&= 0{\cdot}4495 + 0{\cdot}5 \\
&= 0{\cdot}9495
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)\quad P(|t| \leq 1{\cdot}96) &= P[-1{\cdot}96 \leq t \leq 1{\cdot}96] \\
&= P[-1{\cdot}96 \leq t \leq 0] \\
&\qquad + P[0 \leq t \leq 1{\cdot}96] \\
&= 2 \times P[0 \leq t \leq 1{\cdot}96] \\
&= 2 \times 0{\cdot}475 \\
&= 0{\cdot}95
\end{aligned}$$

3. முந்நூறு மாணவர்களின் உயரங்களை அளந்து பார்த்ததில், அவை ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் அமைவதாகக் கண்டனர். அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 68 அங்குலம் என்றும், மாறுபாடு 9 ச. அங்குலம் என்றும் இருந்தால், எத்தனை மாணவர்களின் உயரங்கள்

(*i*) 64 அங்குலத்திற்குக் குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கும் என்றும் ;

(*ii*) 68 அங்குலத்திற்குச் சமமாக இருக்கும் என்றும் ;

(*iii*) 65 அங்குலத்திற்கும், 71 அங்குலத்திற்கும் இடையே அமையும் என்றும், இயல்நிலைப் பரவலின்-பரப்பு அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடு.

இங்குள்ள இயல்நிலைப் பரவலில்,

$\mu = 68,\ \sigma = 3$ என்று அறிகிறோம்.

(*i*) 64 அங்குலத்திற்குக் குறைவான அல்லது சமமான உயரங்களை உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையும், 64·5 அங்குலத்திற்குக் குறைவான உயரங்களை உடையவர்களின் எண்ணிக்கையும் சமம் என்று கொள்ளலாம். மேலும் 64·5″-க்கு ஒப்பான திட்ட இயல்நிலை மாறி *t*-ன் மதிப்பு வருமாறு:

$$t = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{64{\cdot}5 - 68}{3} = \frac{-3{\cdot}5}{3} = -1{\cdot}17$$

$$\begin{aligned}\therefore\ P[t \le -1{\cdot}17] &= P[t \ge 1{\cdot}17]\\ &= P[t \ge 0] - P[0 \le t \le 1{\cdot}17]\\ &= 0{\cdot}5 - 0{\cdot}379 = 0{\cdot}121\end{aligned}$$

எனவே, தேவையான மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 300 \times 0{\cdot}121$

$= 36$ தோராயமாக.

(*ii*) இயல்நிலைப் பரவல் ஒரு தொடர் பரவலாதலின், 68 அங்குல உயரமுடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையும், 67·5 அங்குலத்திற்கும் 68·5 அங்குலத்திற்கும் இடையே அமையும் உயரங்களை உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையும் ஒன்றாகவே இருக்கவேண்டும் எனக் கருதுவோம்.

67·5″-ன் திட்ட அலகு, $t_1 = \dfrac{67{\cdot}5 - 68}{3} = \dfrac{-0{\cdot}5}{3} = -0{\cdot}17$

68·5″-ன் திட்ட அலகு, $t_2 = \dfrac{68{\cdot}5 - 68}{3} = \dfrac{+0{\cdot}5}{3} = 0{\cdot}17$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(t_1 \le t \le t_2) &= P[-0{\cdot}17 \le t \le 0{\cdot}17]\\ &= 2 \times P[0 \le t \le 0{\cdot}17]\\ &= 2 \times 0{\cdot}0675 = 0{\cdot}135\end{aligned}$$

எனவே, தேவையான மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 300 \times 0{\cdot}135$

$= 40$ தோராயமாக.

(*iii*) இதே போன்று (65 அங்., 71 அங்) என்ற இடைவெளியில் அமையும் உயரங்களை உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையும், (64·5″ 71·5″) எனும் இடைவெளியில் உள்ள உயரங்களை உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். t_1, t_2 என்பன $X = 64{\cdot}5$, $X = 71{\cdot}5$ என்பனவற்றிற்கு ஒப்பான திட்ட மதிப்புகளாக இருக்கட்டும்.

$$\text{எனவே, } t_1 = \frac{64{\cdot}5 - 68}{3} = \frac{-3{\cdot}5}{3} = -1{\cdot}17$$

$$t_2 = \frac{71{\cdot}5 - 68}{3} = \frac{3{\cdot}5}{3} = 1{\cdot}17$$

$$\therefore \quad P[t_1 \le t \le t_2] = P[-1{\cdot}17 \le 1{\cdot}17]$$

$$= 2 \times P[0 \le t \le 1{\cdot}17]$$

$$= 2 \times 0{\cdot}379 = 0{\cdot}758$$

ஆகையால் தேவையான எண்ணிக்கை } $= 300 \times 0{\cdot}758 = 227$

தோராயமாக.

4. கணிதப் பட்டப்படிப்பு மாணவர்கள், பல்கலைக்கழகத் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் முறையே 72, 9 என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அத் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அடிப்படையில், முதல் 10% மாணவர்களுக்குச் சிறப்புப் பரிசுகள் அளிக்கப்படும். ஒரு மாணவர் அப்பரிசைப் பெறக்குறைந்தது எத்தனை மதிப்பெண்கள் வாங்க வேண்டும் எனக் கண்டுபிடி.

இங்கு $\mu = 72$, $\sigma = 9$.

மாணவர்களின் மதிப்பெண்களை, X என்ற மாறியினாலும், அம்மாறியின் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியை t என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

பரிசு கிடைப்பதற்குப் பெறவேண்டிய குறைந்த மதிப்பெண்ணை t_1 என்க. முதல் 10 சதவீத மாணவர்களுக்கு மட்டும் இப்பரிசு அளிக்கப்படும் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad P[t \ge t_1] = 0{\cdot}1$$

$$\text{i.e., } P[0 \le t \le t_1 = 0{\cdot}5 - 0{\cdot}1 = 0{\cdot}4$$

ஆகையால், பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து t_1-ன் தோராய மதிப்பு $= 1 \cdot 28$

எனவே தேவையான X-ன் மதிப்பு $= \mu + \sigma \cdot t_1$.

$$= 72 + 9 \times 1 \cdot 28$$
$$= 84$$

5. ஒரு நிறுவனத்தில் உற்பத்தி செய்யப்படும் திருகு ஆணிகளின் கூட்டுச் சராசரியின் மதிப்பு 0·25″ என்றும், திட்ட விலக்கம் 0·02″ என்றும் உள்ளன. ஒரு ஆணியின் விட்டம் 0·2″-க்குக் குறைவானதாகவோ, அல்லது 0·28″-க்கு அதிகமானதாகவோ இருந்தால், அந்த ஆணி குறையுடையது என்று ஒதுக்கப்படும். அந்நிறுவனத்தில் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளில் எத்தனை சதவீதம் குறையுடையன என்று கண்டுபிடி.

X எனும் மாறி திருகு ஆணிகளின் விட்டங்களின் அளவுகளைக் குறிக்கட்டும்.

$\therefore \quad X_1 = 0 \cdot 2, X_2 = 0 \cdot 28$ என்க.

மேலும் $\mu = 0 \cdot 25, \sigma = 0 \cdot 02$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

திட்டமாக்கப்பட்ட இயல்நிலை மாறியை t என்று குறிப்பிட்டால்,

$$\text{பின்}, \ t_1 = \frac{0 \cdot 2 - 0 \cdot 25}{0 \cdot 02} = \frac{-0 \cdot 05}{0 \cdot 02} = -2 \cdot 5$$

$$111^{lry} \quad t_2 = \frac{0 \cdot 28 - 0 \cdot 25}{0 \cdot 02} = \frac{0 \cdot 03}{0 \cdot 02} = \frac{3}{2} = 1 \cdot 5$$

$$\therefore \quad P\, t \leq -2 \cdot 5 = P(t \geq 2 \cdot 5)$$
$$= P(t \geq 0) - P(0 \geq t \leq 2 \cdot 5)$$
$$= 0 \cdot 5 - 0 \cdot 4938$$
$$= 0 \cdot 0062$$

$$111^{iry} \ P(t \geq 1 \cdot 5) = P(t \geq 0) - P(0 \leq t \leq 1.5)$$
$$= 0 \cdot 5 - 0 \cdot 4332$$
$$= 0 \cdot 0668$$

எனவே, குறையுடைய ஆணிகளின் சதவீதம்

$$= (0 \cdot 0062 + 0 \cdot 0668) \times 100$$
$$= 0 \cdot 073 \times 100$$
$$= 7 \cdot 3$$

6. ஒரு சமச்சீரான நாணயத்தை 400 தடவைகள் சுண்டினால் கிடைக்கப்பெறும் தலைகளின் எண்ணிக்கை இருநூறை விட 25-க்கும் அதிகமாக வித்தியாசப்படுவதற்கான நிகழ்தகவை இயல் நிலைப் பரவலின்மூலம் கணக்கிடு.

இங்கு $p = \frac{1}{2}$, $N = 400$

$$\therefore \quad \mu = Np = 400 \times \frac{1}{2} = 200; \quad \sigma = \sqrt{Npq}$$

$= \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 10$ நாணயத்தைச் சுண்டும்போது கிடைக்கப்பெறும் தலைகளின் எண்ணிக்கை 200 -ஐவிட 25-க்கும் அதிகமாக மாறுபடவேண்டுமாதலால், தலைகளின் 175-விட குறைவாகவோ அல்லது 225-ஐ விட அதிகமாகவோ இருக்கவேண்டும்.

X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் மாறி என்க. இம்மாறியின் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியை t என்க.

இங்கு X ஒரு தொடர் இயல்நிலை மாறியாதலின், X-ன் மதிப்பு 175-ஐவிடக் குறைவாகவோ, அல்லது 225-ஐ விட அதிகமாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவும், அதன் மதிப்பு 174·5·ஐ விடக் குறைவாகவோ, அல்லது 225·5-ஐ விட அதிகமாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவும் சமமாகும்.

174·5-ன் திட்டமாக்கப்பட்ட மதிப்பு $t_1 = \frac{174 \cdot 5 - 200}{10} = -2 \cdot 55$

225·5-ன் திட்டமாக்கப்பட்ட மதிப்பு $t_2 = \frac{225 \cdot 5 - 200}{10} = 2 \cdot 55$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \text{தேவையான நிகழ்தகவு} &= P(t \geq t_1) + P(t \geq t_2) \\ &= P(t \leq -2 \cdot 55) + P(t \geq 2 \cdot 55) \\ &= 1 - P(-2 \cdot 55 \leq t \leq 2 \cdot 55) \\ &= 1 - 2 \times P(0 \leq t \leq 2 \cdot 55) \\ &= 1 - 2 \times 0 \cdot 4946 \\ &= 0 \cdot 0108. \end{aligned}$$

7. ஆறு முகப்பகடை ஒன்றை 720 தடவைகள் உருட்டினால், 6 என்ற இலக்கம்

(*i*) 100-லிருந்து 125 தடவைகள்வரை கிடைப்பதற்கான,

(*ii*) 150 தடவைகளுக்குமேல் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

இங்கு $p = \frac{1}{6}$, $N = 720$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\therefore \quad \mu = Np = 120; \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 10$$

(*i*) 6 எனும் இலக்கம் கிடைக்கக்கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையை X எனக் குறிப்பிடுவோம். இது ஒரு தொடர் இயல் நிலை மாறியதலால். 100-லிருந்து 125 தடவைகள் வரை 6 என்ற எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும், 99·5-லிருந்து 125·5 தடவைகளுக்குள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும் சமமாக இருக்கும்.

X-ன் திட்டமாக்கப்பட்ட மதிப்புகளை t என்ற மாறி குறிக்கட்டும்.

$$\therefore \quad t_1 = \frac{X_1 - 120}{10} = \frac{99{\cdot}5 - 120}{10} = -2{\cdot}05$$

$$t_2 = \frac{X_2 - 120}{10} = \frac{125{\cdot}5 - 120}{10} = 0{\cdot}55$$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவு $= P\,[t_1 \leq t \leq t_2]$

$$\begin{aligned} &= P\,[-2{\cdot}05 \leq t \leq 0{\cdot}55] \\ &= P\,[-2{\cdot}05 \leq t \leq 0] + P\,[0 \leq t \leq 0{\cdot}55] \\ &= 0{\cdot}4798 + 0{\cdot}2088 \\ &= 0{\cdot}6886. \end{aligned}$$

(*ii*) தலைகளின் எண்ணிக்கை 150-ஐவிட அதிகமாக இருந்தால், அந்த எண்ணிக்கை 150·5-ஐவிட அதிகமாக இருக்க வேண்டும்.

150·5-ன் திட்டமாக்கப்பட்ட மதிப்பு $= \frac{150{\cdot}5 - 120}{10} = \frac{30{\cdot}5}{10} = 3{\cdot}05$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= P[t \geq 3{\cdot}05$

$= 0{\cdot}5 - P(0 \leq t \leq 3.05)$

$= 0{\cdot}5 - 0.4989$

$= 0{\cdot}0011.$

8. பட்டப் படிப்புத் தேர்வு எழுதிய 1000 கலைப் பிரிவு மாணவர்களுள், முதல் வகுப்பு, இரண்டாம் வகுப்பு, மூன்றும் வகுப்பில் தேறியவர்களின் விவரம் பின்வருமாறு

மதிப்பெண்கள்		மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
முதல் வகுப்பு :	60 —	50
இரண்டாம் வகுப்பு :	50 — 60	350
மூன்றும் வகுப்பு :	· — 50	600

இந்தப் புள்ளி விவரம் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலை உருவாக்கும் என்று கருதிப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க. மேலும் 43-க்கு மேல் 53-க்குள் மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையையும் கணக்கிடு.

1000 மாணவர்களுள் மூன்றும் வகுப்பில் தேறியவர்களின் எண்ணிக்கை = 600 அதாவது, $x = 50$ என்ற குத்துக்கோட்டிற்கு இடது புறமாக நிகழ்தகவு வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பின் அளவு $= 0{\cdot}6$ ச. அலகு என்று விளங்கும்.

இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை μ என்றும், திட்ட விலக்கத்தை σ என்றும் கொள்வோம். திட்டமாக்கப்பட்ட இயல்நிலை மாறியை t என்று குறிப்பிட்டால், பின் $t = 0$ முதல் $t = \dfrac{50 - \mu}{\sigma}$ வரை அமையும் நிகழ்தகவு வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு $= 0 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 0 \cdot 1$ ச. அலகாகும்.

இடைச் செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி, இந்தப் பரப்பளவிற்கு ஒப்பான t-ன் மதிப்பு $= 0 \cdot 254$ என்று பெறலாம்.

அதாவது $\dfrac{50 - \mu}{\sigma} = 0 \cdot 254$; i.e., $50 - \mu$

$$= 0 \cdot 254\,\mu \quad \ldots (1)$$

1000 மாணவர்களுள் முதல் வகுப்பில் தேறியவர்கள் 50 மாணவர்கள் என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $x = 60$ என்ற குத்துக்கோட்டிற்கு வலதுபுறமாக இயல்நிலை வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு $= 0 \cdot 05.$

அதாவது $t = 0$, $t = \frac{60 - \mu}{\sigma}$ என்ற குத்துக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு $= 0 \cdot 5 - 0 \cdot 05 = 0 \cdot 45$ ச. அலகாகும்.

முன்போல் இடைச் செருகல் மூலம், இப்பரப்பிற்கு ஒப்ப அமையும் t-ன் மதிப்பு $= 1 \cdot 65$ என்று காணலாம்.

$$i.e., \frac{60 - \mu}{\sigma} = 1 \cdot 65; \quad i.e., \quad 60 - \mu = 1 \cdot 65\, \sigma \quad \text{— (2)}$$

இப்பொழுது சமன்பாடுகள் (1), (2)-ன் தீர்வுகள் காண,

$\mu = 48$, $\sigma = 7\ 1$ என்று கிடைக்கும்.

அடுத்து 43-லிருந்து 53-மதிப்பெண்களுக்குள் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையைப் பெறும் முறை வருமாறு :

$$X = 43\text{-ன் திட்ட மதிப்பு} = \frac{43 - 48}{7 \cdot 1} = -\ 0 \cdot 7$$

$$X = 53\text{-ன் திட்ட மதிப்பு} = \frac{53 - 48}{7 \cdot 1} = 0 \cdot 7$$

இப்பொழுது $P\,[-0 \cdot 7 \leq t \leq 0 \cdot 7] = 2 \times P[0 \leq t \leq 0 \cdot 7]$
$= 2 \times 0 \cdot 258 = 0 \cdot 516$
$= 0 \cdot 5$ தோராயமாக.

$\therefore$ தேவையான மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 0 \cdot 5 \times 1000$
$= 500.$

9. கூட்டுச் சராசரி ஒன்று எனவும், மாறுபாடு 4 எனவும் உடைய ஒரு இயல் நிலைப் பரவலில் $\log e^x$ அமையுமானால், $P\left(\frac{1}{2} < x < 2\right)$-ன் மதிப்பு என்ன?

($\log e^2 = 0 \cdot 693$ என்று எடுத்துக்கொள்ளவும்.)

$z = \log e^x$ என்க. இங்கு $\mu = 1$, $\sigma = 2$

பின் z-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$$dP = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z-1}{2} \right)^2} \cdot dz$$

எனவே $P\left[\frac{1}{2} < x < 2 \right]$

$$= P[-\log e^{2} \le \log e^{x} \le \log e^{2}]$$

$$= P[-0 \cdot 693 \le \log e^{x} \le 0 \cdot 693]$$

$$= P[z_1 \le z \le z_2]$$

z-ன் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியை t என்க.

$$\therefore \quad t_1 = \frac{z_1 - 1}{2} = \frac{-0 \cdot 693 - 1}{2} = -0\ 8465 = -0{\cdot}85$$

தோராயமாக.

$$t_2 = \frac{z_2 - 1}{2} = \frac{0 \cdot 693 - 1}{2} = 0{\cdot}1535 = 0.15,$$

தோராயமாக.

ஆகையால், தேவையான நிகழ்தகவு

$$= P[t_1 \le t \le t_2]$$

$$= P[-0{\cdot}85 \le t \le 0{\cdot}15]$$

$$= P[-0{\cdot}85 \le t \le 0] + P[0 \le t \le 0{\cdot}15]$$

$$= 0{\cdot}3023 + 0{\cdot}0596$$

$$= 0{\cdot}3619.$$

10. பின்வரும் விவரங்களை ஒரு இயல் நிலைப்பரவலில் பொருத்துக. கண்டறிந்த அலைவெண்களோடு, கணக்கிடப்படும் அலைவெண்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்.

100 கல்லூரி மாணவர்களின் உயரங்கள்

உயரம் (அங்குலத்தில்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
60—62	5
63—65	18
66—68	42
69—71	27
72—74	8
மொத்தம்	100

இயல் நிலைப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் முதலில் கணக்கிடுவோம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து பின்வரும் அட்டவணையைத் தயாரிப்போம். அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் கணக்கிடலாம்.

பிரிவின் நடுமதிப்பு (X)	அலைவெண் (f)	$X-A$ (d)	$f \cdot d$	$f \cdot d^2$
61	5	−6	−30	180
64	18	−3	−54	162
$67=A$	42	0	0	0
70	27	3	81	243
73	8	6	48	288
மொத்தம்	100	—	45	873

$$\mu = A + \frac{\Sigma f \cdot d}{\Sigma f}$$

$$= 67 + \frac{45}{100}$$

$$= 67 \cdot 45$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f \cdot d^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2$$

$$= \frac{873}{100} - \left(\frac{45}{100}\right)^2$$

$$= 8 \cdot 5275$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{8 \cdot 5275} = 2 \cdot 92$$

எனவே, தேவையான இயல் நிலைப்பரவலின் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(2 \cdot 92)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x - 67 \cdot 45}{2 \cdot 92}\right]^2} \cdot dx$$ என்று

கிடைக்கும்.

இந் நிகழ்தகவு வகையீட்டிலிருந்து பின்வரும் விவரங்களைத் தயாரிக்கலாம். இயல் நிலை வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு காண்பதற்கான அட்டவணையிலிருந்து இந்த விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இந்த அட்டவணையின் நான்காவது நிரலில் உள்ள பரப்பு களின் மதிப்பு 0-முதல் t-வரையிலுள்ள இயல் நிலை வளைவரைக்குட் பட்ட பரப்புகளைக் குறிக்கும். மேலும் கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு பிரிவுக்கான பரப்பும் நான்காவது நிரலின் அடுத்தடுத்துள்ள இரண்டு பரப்புகளின் வித்தியாசமாகவோ, அல்லது கூடுத

பிரிவு இடைவெளி	பிரிவின் எல்லை மதிப்பு (X).	$t=\frac{X-\mu}{\sigma}$	பரப்பு (0-லிருந்து t-வரை).	ஒவ்வொரு பிரிவுக்குட் பட்ட பரப்பு.	எதிர் பார்க்கும் அலை வெண்
	59·5	—2·72	0·4967		
60—62 ←			→	0·0413	4·13
	62·5	—1·7	0 4554		
63—65 ←			—	0·2068	20·68
	65·5	—0·67	0·2486		
66—68 ←			—	0·3892	38 92
	68·5	0·36	0·1406		
69—71 ←			→	0 2771	27·71
	71·5	1·39	0·4177		
72—74 ←			→	0·0743	7·43
	74·5	2 41	0·4920		

லாகவோ கணக்கிடப்படும். t-ன் மதிப்புகள் ஒரே அடையாள முடையவைகளாயின், 4-ஆவது நிரலில் அடுத்து அடுத்துள்ள இரண்டு பரப்புகளின் வித்தியாசத்தையும், மாறுபட்ட அடையாளங் களை உடையவைகளாயின் பரப்புகளின் கூடுதலையும் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். இவ்வாறு ஐந்தாவது நிரலில் உள்ள மதிப்புகள் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. இம் மதிப்புகளை மொத்த மதிப்பாகிய 100-ஆல் பெருக்க 6-ஆவது நிரலில் உள்ள எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் கிடைக்கப்பெறும். இவற்றின் தோராய மதிப்புகளாவன :

4, 21, 39, 28, 7 ; கூடுதல் = 99

ஆனல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண்கள்,

5, 18, 42, 27, 8 என்பனவாம்.

இவ்விருவகை மதிப்புகளின் கூடுதல்களும் சிறிது மாறு படுகின்றன என்பதை அறியவும்.

பயிற்சி 5.

1. X என்ற ஒரு தொடர் மாறி $N(0, 1)$ எனும் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்திருக்குமானல், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $P(0 \leq X \leq 1 \cdot 42)$ [விடை: (i) 0·4222

(ii) $P(X \geq 1 \cdot 13)$ (ii) 0·1292

(iii) $P(-1 \cdot 37 \leq X \leq 2 \cdot 01)$ (iii) 0·8925

(iv) $P(|x| \leq 0 \cdot 5)$ (iv) 0·3830]

2. X என்பது $\phi(t)$ எனும் திட்ட இயல்நிலைப்பரவலை உடைய ஒரு தொடர் மாறி என்ருல் பின்வரும் நிகழ்தகவுகளுக்கு ஒப்பான t-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $P(0 \leq X \leq t) = 0 \cdot 4236$ [விடை: (i) 1·43

(ii) $P(X \leq t) = 0 \cdot 7967$ (ii) 0 83

(iii) $P(t \leq X \leq 2) = 0 \cdot 1000$ (iii) 1·16]

3. 1966-ம் ஆண்டு ஜூன் மாதத்தில் நிலவிய வெப்ப நிலையைக் குறித்துப் பார்த்ததில், அது 68°-ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும், 6°-ஐ திட்டவிலக்கமாகவும் உடைய ஒரு இயல் நிலைப் பரவலில் அமைந்திருப்பதாகத் தெரியவந்தது. அம் மாதத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் வெப்பம் 70°-க்கும் 80°க்கும் இடையே இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

[விடை: 0·3479]

4. ஒரு கல்லூரியில் பயிலும் 500 புகுமுக வகுப்பு மாணவர்களின் எடைகள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலை உருவாக்கு கின்றன. அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 151 பவுண்டு, மாறுபாடு 225 என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், எத்தனை மாணவர்களின் எடைகள் 120 பவுண்டுக்கும் 155 பவுண்டுக்கும் இடையே அமையும்? எத்தனை மாணவர்களின் எடைகள் 185 பவுண்டிற்கு அதிகமாக இருக்கும்? எத்தனை மாணவர்களின் எடைகள் 128 பவுண்டிற்குச் சமமாக இருக்கும்?

[விடை: (i) 300, (ii) 5, (iii) 29]

5. பல்கலைக் கழகத் தேர்வில் பட்டப்படிப்பு மாணவர்கள், முதல் பாகம் தமிழில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 76-ஐக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், 15ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு இயல் நிலைப் பரவலில் அமைகின்றன. அவர்களுள் 15 சதவீத மாணவர்கள் முதல் வகுப்பில் வெற்றி பெற்றனர்; 10 சதவீத மாணவர்கள் தோல்வியடைந்தனர். முதல் வகுப்பைப் பெறுவதற்கான குறைந்த மதிப்பெண்ணையும், தேர்வில் வெற்றி பெறுவதற்கான குறைந்த மதிப்பெண்ணையும் கணக்கிடு.

[விடை: (*i*) 92, (*ii*) 57]

6. ஒரு குறிப்பிட்ட இயல்நிலைப் பரவலின், 10-ஐ மையமாகக் கொண்ட முதலாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை 40 என்றும், 50-ஐ மையமாகக் கொண்ட நான்காம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை 48 என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், மாறுபாட்டையும் கண்டுபிடி.

[விடை: 50; 4]

7. வேலை வாய்ப்பு அளிக்கும் நிறுவனம் ஒன்றினல் நடத்தப் பட்ட தேர்வில், 5000 பொறியியல் பட்டப்படிப்பினர் பங்கு பெற்றனர். அவர்களுக்கு அளிக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களுக்கான இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 39·5 என்றும், திட்ட விலக்கம் 12·5 என்றும் தெரிவிக்கப்பட்டது. குறைந்த அளவு 60% மதிப்பெண்கள் பெற்ற அனைவருக்கும் அந்நிறுவனம் வேலை அளிக்கக் கூடும் என்றால், வேலை கிடைக்கப் பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர் என்று தோராயமாகக் கண்டுபிடி.

[விடை: 250]

8. ஒரு பட்டப்படிப்பு வகுப்பில் நடந்த புள்ளியியல் தேர்வில் 31 சதவீதத்தினர் 45-க்குக் கீழும்; 8 சதவீதத்தினர் 64-க்கு மேலும் மதிப்பெண்கள் பெற்றனர். அம் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் இருக்குமானல், அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் கண்டுபிடி.

[விடை: 50, 10]

9. பல்கலைக்கழக உயர் பட்டப்படிப்புத் தேர்வில் வெற்றி பெற்றவர்கள் 45% என்றும், அவர்களுள் முதல் வகுப்பில் தேறியவர்கள் 9% என்றும் தெரிவிக்கப்பட்டது. மேலும் இத் தேர்வில் வெற்றியடைய குறைந்தது 40 மதிப்பெண்களும், முதல் வகுப்பில் தேறக் குறைந்தது 75 மதிப்பெண்களும் பெற

வேண்டுமானால், மதிப்பெண்களுக்கான பரவலை ஒரு இயல் நிலையானது எனக் கருதி, அப்பரவலின் சராசரியைக் கணக்கிடு.
[விடை: 36 4]

10. இராணுவப் பணிக்காக தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 300 டாக்டர்களின் உயரங்களை ஏறு வரிசையில் அமைத்ததில், 120-ஆவது அளவு 64·5 அங்குலம் என்றும், 210-ஆவது அளவு 67·35 அங்குலம் என்றும் தெரியவந்தது. இந்த உயரங்கள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்தால், 50-ஆவது, 270-ஆவது அளவுகளின் மதிப்புகள் என்ன?

இங்கு பின்வரும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தவும். இவ் வட்டவணையில் p என்பது t எனும் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியின் மதிப்பு $(-t, t)$ எனும் இடைவெளிக்கு வெளியே அமைவதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்கும்.

p	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
t	1·6449	1·2816	1·0364	0·8416	0·6745	0·6244	0·5244	0·3853	0·1255

[விடை: 62 36, 70·11]

11. ஒரு தொழிற்சாலையில் 3 அங்குல விட்டமுள்ள இரும்புக் கம்பிகள் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. கம்பிகளின் விட்டங்கள் 2·99″ — 3 01″ என்ற வீச்சினுள் அமைந்திருந்தாலும் அவை விற்பனைக்கு ஏற்றவை என எடுத்துக்கொள்ளப்படும்; இத் தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் கம்பிகளில் 5 சதவீதத்தை, விட்டம் அதிக முடையன என்றும், மேலும் 5 சதவீதத்தை விட்டம் குறைவான அளவுடையன என்றும் ஒதுக்கிவிடுகின்றனர். விட்டங்களின் அளவுகள் இயல்நிலைப் பரவலில் உள்ளன எனக் கருதி பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடு.

மேலும் விற்பனைக்குத் தகுதியான கம்பிகளின் விட்டங்கள் 2·985″ — 3 015″ என்ற வீச்சினுள்ளும் அமைந்திருக்கலாம் என்று தெரிவிக்கப்பட்டால், எத்தனை சதவீதக் கம்பிகள் ஒதுக்கப்பட்டு விடுமெனக் கண்டுபிடி.

பின்வரும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தவும். இங்கு A எனும் பரப்பு, கூட்டுச் சராசரி பூஜ்யத்திலிருந்து x-வரையில் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது.

x/σ	A
1·64	0·4995
1 65	0·4505
2.5	0·49 8

[விடை: 0·806
1·24%]

12. இராணுவத்தின் ஒரு பகுதியினரின் சராசரி உயரம் 68·22″ என்றும், மாறுபாடு 10·8 ச-அங். என்றும் உள்ளன. 1000 இராணுவ வீரர்களில் எத்தனை பேர்களின் உயரங்கள் 6 அடிக்கும் அதிகமாக இருக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம்?

இங்கு $x = 0$, $x = 0·35$ எனும் இடைவெளியில் அமையும் இயல்நிலை வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு 0 1368 என்றும், $x = 0$, $x = 1·15$ எனும் இடைவெளிக்குட்பட்ட பரப்பு 0·3746 என்றும் எடுத்துக் கொள்ளவும். [விடை : 125]

13. ஒரு சமச்சீரான நாணயம் ஒன்றை 10 முறை உருட்டி விட்டால், 4-லிருந்து 7 பூக்கள் வரை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? [விடை: 0·7718]

14. ஒரு பிறழ்ச்சி அற்ற நாணயத்தை 200 முறை உருட்டும் போது,

(*i*) 90 தலைகளுக்குக் குறைவாக இருப்பதற்கான;

(*ii*) 85 தலைகளுக்குக் குறைவாக அல்லது 115 தலைகளுக்கு அதிகமாக இருப்பதற்கான;

(*iii*) சரியாக 100 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடு. [விடை: (*i*) C·0687
(*ii*) 0·0286
(*iii*) 0·0558]

15. இரண்டு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டும் போது 25-க்கும் அதிகமான தடவைகள் ஏழு என்ற கூட்டுத் தொகை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? [விடை: 0·0089]

16. ஒரு பகடையை 180 தடவைகள் உருட்டிவிட்டால் 6 எனும் இலக்கம்

(i) 21-லிருந்து 32 தடவைகள் வரை கிடைப்பதற்கான ;

(ii) 31-லிருந்து 35 தடவைகள் வரை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

[விடை : (i) 0·3094 (i) 0·3245]

17. 10,000 சரிசம வாய்ப்புள்ள இலக்கங்களை எடுத்துக் கொள்ளும்போது, 3 எனும் இலக்கம் அதிகமாக 950 தடவைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ? [விடை : 0·0475]

18. X எனும் தொடர் மாறி $N(3, 4)$ எனும் இயல்நிலைப் பரவலை உடையதாக இருந்தால், $P(X > K) = 2P(X \leq K)$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு K-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

[விடை : $K = 2{\cdot}14$]

19. X என்ற தொடர் மாறி $N(0, 1)$ எனும் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்திருந்தால், (i) (X^2) (ii) e^{ax}-ன் எதிர் நோக்கலைக் காண்க. $\left[\text{விடை : (i) } 1, \quad \text{(ii) } \frac{a^2}{e^2}\right]$

20. எந்த ஒரு இயல்நிலைப் பரவலிலும், கால்மான விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்டவிலக்கம் முதலியன ஏறக்குறைய 10 : 12 : 15 என்ற விகிதத்தில் இருக்கும் என நிரூபி.

21. அலைவெண்களின் கூட்டுத் தொகைகள் சமமாக உடைய இரண்டு இயல்நிலைப் பரவல்களில் ஒன்றின் திட்ட விலக்கம் மற்றொன்றின் திட்டவிலக்கத்தைப் போன்று இரண்டு மடங்கு இருந்தால், அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியும், மற்றொன்றின் கூட்டுச் சராசரியைப்போன்று இரண்டு மடங்கு இருக்கும் என நிறுவுக.

22. இரண்டு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் அலைவெண்களின் கூடுதல்கள் சமமாக உள்ளன. ஒரு பரவலின் திட்டவிலக்கம் மற்றொன்றின் திட்டவிலக்கத்தைப்போன்று K மடங்கு இருக்குமானால், முதலாம் பரவலின் மீப்பெரு அலைவெண்ணின் மதிப்பு இரண்டாவது பரவலின் மீப்பெரு அலைவெண்ணைப்போன்று $\left(\frac{1}{k}\right)$ மடங்கு இருக்குமெனக் காட்டு.

23. ஒரு மின் விளக்கு எரியக்கூடிய சராசரி நாட்களின் எண்ணிக்கை 50 என்றும், திட்டவிலக்கம் 5 என்றும் கொடுக்கப் பட்டால், 1-12-1969-ல் போடப்பட்ட 1000 மின் விளக்குகளில் எத்தனை விளக்குகளை 1-12-71-க்குள் மாற்றவேண்டி வரும் ?

24. X என்பது $\bar{X}$-ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும், σ-ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் உடைய ஒரு இயல்நிலை மாறி எனில், $Y = \frac{1}{2}\left(\frac{X - \bar{X}}{\sigma}\right)^2$ எனும் மாறியின் பரவலுக்கான கூட்டுச் சராசரியும், மாறுபாடும் $\frac{1}{2}$-க்குச் சமம் எனக் காட்டு.

25. X, Y என்பன இரண்டு சார்பிலாத் தொடர் இயல்நிலை மாறிகள் என்றும், அவற்றின் பரவல்கள் ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யத்தைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், ஒன்றை மாறுபாடாகவும் உடையவை என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$; $V = X^2\,Y^2$ என்ற மாறிகளின் அடர்த்திச் சார்பைக் கண்டுபிடி.

[விடை: (i) $f(u) = u\,e^{-\frac{u^2}{2}}$; (ii) $f(v) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{v}{2}}$]

26. பின்வரும் விவரங்களுக்கான பரவல் இயல்நிலையானது என்று காட்டு. மேலும் பரவலின் சார் அலைவெண்களையும் கண்டுபிடி.

நடுப்புள்ளி-X	2	4	6	8	10
அலைவெண்-f	1	4	6	4	1

[விடை : (i) $y = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{8}(x-6)^2}$

(ii) அலைவெண் : 0·864, 3·872, 6·382, 3·872, 0·864]

27. கீழ்வரும் அட்டவணையின் விவரங்கள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலை உருவாக்கும் எனக் காட்டு. மேலும் கண்டறிந்த அலைவெண்களை, கணக்கிடப்படும் அலைவெண்களோடு ஒப்பிடவும்.

பிரிவின் இடைவெளி	அலைவெண்
9·3 — 9·7	2
9·8 — 10.2	5
10·3 — 10 7	12
10.8 — 11·2	17
11·3 — 11 7	14
11·8 — 12·2	6
12 3 — 12·7	3
12 8 — 13·2	1
மொத்தம்	60

[விடை: அலைவெண்களாவன : 1·7, 5.5, 12, 15.9
13·7, 7 6, 2 7, 0 6]

28. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 4, மாறுபாடும் 4 என்னும், $\log_{10} x$ எனும் மாறி இப்பரவலில் அமைந்துள்ளது என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் $P\,[1{\cdot}202 < x < 83180000]$-ன் மதிப்பு என்ன ?

(இங்கு $\log_{10} 1202 = 3{\cdot}08$; $\log_{10} 8318 = 3.92$ என எடுத்துக்கொள்ளவும்.] [விடை : 0·95]

6. எல்லைத் தேற்றங்கள்

இயல்நிலைப் பரவலை எல்லை மதிப்பு என நிறுவுதல் : ஈருறுப்புப் பரவல், பாய்சான் பரவல் போன்ற தொடர்ச்சியற்ற பரவல்களின் எல்லை மதிப்பாக இயல்நிலைப் பரவலைப் பெறலாம் என்பதை பின்வரும் தேற்றங்களின் மூலம் நிறுவ இருக்கிறோம்.

6·1 தேற்றம் 1 : X என்பது ஒரு ஈருறுப்பு மாறி எனில், $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ என்ற மாறி, n முடிவிலியை அணுகும்போது இயல்நிலை மாறியாகும்.

நிரூபணம்

X என்ற ஈருறுப்பு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி np என்றும் திட்ட விலக்கம் σ என்றும் கொள்வோம். பின் $\sigma = \sqrt{npq}$ என்றிருக்கும் ஆகையால், $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ என்ற மாறியின் கூட்டுச் சராசரி பூஜ்யமாகவும், திட்டவிலக்கம் "ஒன்று" எனவும் இருக்கும்.

மேலும் X-ன் மதிப்பு பூஜ்யத்திலிருந்து, n-க்கு மாறும் போது, Z-ன் மதிப்பு $\dfrac{(-np)}{\sqrt{npq}}$-லிருந்து, $\dfrac{(np)}{\sqrt{npq}}$-க்கு மாறும் என்று தெரிகிறது. X-ன் மதிப்பு ஒவ்வொன்றாக அதிகரிப்பதற்கேற்ப, Z-ல் ஏற்படும் மாற்றம் $\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$ என்றிருக்கும். இவ்வாறு, n-ன் மதிப்பை அதிகரிக்கும்போது இம்மாற்றம் குறைந்து கொண்டே சென்று, இறுதியாக n முடிவிலியை அணுகும்போது, $\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$ பூஜ்யத்தை அணுகும் என்றும் அறியலாம். அதாவது Z-ல் ஏற்படும் மாற்றம் ஒரு கழிநுண் மதிப்பாகும்.

இதேபோன்று, p, q என்பன பூஜ்யமாக இராவிடில், n முடிவிலியை அணுகும் போது, Z-ன் எல்லை மதிப்புகள் $(-\infty, \infty)$ என்றாகும். எனவே $(-\infty, \infty)$ என்ற முடிவிலா இடைவெளியில் அமையும் Z-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஏற்ப, இதன் பரவல் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும். இப்பரவலின் அடர்த்திச் சார்பை இனி காண்போம்.

X எனும் ஈருறுப்புப் பரவல் மாறி x என்ற மதிப்பை அடைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$P[X = x] = n_{cx} \cdot p^x \cdot q^{-nx}$ என்று அறிந்துள்ளோம்.

$$i.e., P[X = x] = \frac{\angle^n}{\angle^x \angle^{n-x}} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

n முடிவிலியை அணுகும்போது P-ன் எல்லையைக் காண, $\angle^n$-க்கு ஸ்டர்லிங்கின் தோராய மதிப்பைப் (Stirling's Approximation) பிரதியிடுவோமானால்,

$$\underset{n\to\infty}{Lt} P = \underset{n\to\infty}{Lt}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot p^x \cdot q^{n-x}}{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-x} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-(n-x)} \cdot (n-x)^{\left(n-x+\frac{1}{2}\right)}}\right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \left(\frac{np}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x+\frac{1}{2}}\right] \quad \ldots\ldots (1)$$

இதில், $\frac{1}{N} = \left(\frac{np}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x+\frac{1}{2}}$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

$$\text{i.e.,}\quad N = \left(\frac{x}{np}\right)^{x+\frac{1}{2}} \left(\frac{n-x}{nq}\right)^{n-x+\frac{1}{2}}$$

$$\text{i.e.,}\ \log_e N = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{x}{np}\right)$$

$$+\left(n-x+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n-x}{nq}\right)$$

ஆனால் $Z = \dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ என்பதால், $z = \dfrac{x-np}{\sqrt{npq}}$ என்றிருக்கும். இதிலிருந்து,

$$\frac{x}{np} = 1 + z\sqrt{\frac{q}{np}} \text{ என்றும் ; } \frac{n-x}{nq}$$

$$= 1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}$$ என்றும் கிடைக்கப் பெறும். ஆகையால்,

$$\log_e N = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left[1+z\sqrt{\frac{q}{np}}\right]$$

$$+\left(n-x+\frac{1}{2}\right)\log\left[1-z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right]$$

மேலும், z-ன் எண்ணளவு, $\sqrt{\dfrac{np}{q}}$, $\sqrt{\dfrac{nq}{p}}$ இவற்றுள் சிறிய எண்ணைவிடச் சிறியதாக இருக்குமெனக் கருதுவோம். எனவே, மடக்கைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, வலது புறத்திலுள்ள கோவைகளை z-ன் படியில் விரித்து எழுதலாம்.

$$\therefore\ \log_e N = \left(np + z\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left[z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\left(z\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^2 + \cdots\cdots \to \infty\right]$$

$$+ \left(nq - z\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\times \left[- z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\left(z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^2 - \cdots\cdots \to \infty\right]$$

$$= \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right) \cdot \frac{z}{2\sqrt{n}}$$

$$+ \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right)\right] z^2 + \left[\left(\frac{1}{n}\right)\text{-ன் படி}\right.$$

ஒன்றைவிட அதிகமாக உள்ள உறுப்புகள் $\left.\right]$ இரண்டு பக்கமும், n முடிவிலியை அணுகும்போது, எல்லையைக் காண,

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \log_e N = \frac{1}{2} z^2 \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{Lt} N = e^{\frac{1}{2} z^2} \; ; \text{ i.e., } \underset{n \to \infty}{Lt} \left(\frac{1}{N}\right) = e^{-\frac{1}{2} z^2}$$

X என்ற மாறி ஏற்கும் ஒவ்வொரு முழு எண் மதிப்புக்கும் ஏற்ப, Z-ல் ஏற்படும் மாற்றமாகிய $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ என்பது ஒரு கழி நுண் மதிப்பு எனக் கண்டோம். ஆகையால் n முடிவிலியை அணுகும் போது, இம்மாற்றத்தை dz என்று குறிப்பிடுவோம். இவ்வாறு, Z-ன் மதிப்பு $\left(z - \frac{1}{2} dz, \; z + \frac{1}{2} dz\right)$ என்ற நுண்ணிய இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு, முடிவு (1)-ஐப் பயன் படுத்த,

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz \text{ என்று கிடைக்கப்பெறும்.}$$

இது, $-\infty < z < \infty$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் z-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாகும். இவ்வாறு Z-ன்

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு. $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} z^2\right)}$ என்று அறிகிறோம் எனவே, Z-ன் பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவல் என்று பெறப்படுகின்றது.

குறிப்பு : (i) இங்கு Z-ன் பரவல் திட்டமாக்கப்பட்ட இயல் நிலைப் பரவலாக கிடைத்துள்ளது. இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி பூஜ்யம் என்றும், திட்ட விலக்கம் ஒன்று என்றும் நிரூபித்துள்ளோம்.

(ii) இதில் $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ என்றிடுவோமானால் தேவையான பரவலின் அடர்த்திச் சார்பு,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$ என்று

கிடைக்கும்.

6·2 தேற்றம் 2 : பாய்சான் பரவலில் m எனும் துணை அலகின் மதிப்பு எண்ணிலடங்காது அதிகரிக்குமானால், $\left(\frac{X - m}{\sqrt{m}}\right)$ என்ற மாறி ஒரு இயல் நிலை மாறியாக மாறும்.

நிரூபணம் :

X எனும் பாய்சான் பரவல் மாறி x என்ற மதிப்பை அடைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(X = x) = \left(\frac{e^{-m} \cdot m^x}{\angle x}\right)$$ என்று தெரியும்.

ஆகையால் அம்மாறி $(x + m)$ எனும் மதிப்பைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(X = x + m) = \frac{e^{-m} \cdot m^{m+x}}{\angle m+x}$$ என்றாகும்.

i.e., $P(X - m = x) = \dfrac{e^{-m} \cdot m^{m+x}}{\sqrt{2\pi} \cdot (m+x)^{m+x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-(m+x)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x} \cdot m^{m+x} \cdot (m+x)^{-\left(m+x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{x}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{(m+x)\log m} \cdot e^{-\left(m+x+\frac{1}{2}\right)\log(m+x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left[x + (m+x)\log m - \left(m+x+\frac{1}{2}\right)\log(m+x\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left[x + \left(m+x+\frac{1}{2}\right)\{\log m - \log(m+x)\} - \frac{1}{2}\log m\right]}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\log m}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[x - \left(m+x+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{m+x}{m}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \cdot e^{\left[x - \left(m+x+\frac{1}{2}\right)\right.}$$

$$\left.\cdot \log\left(1 + \frac{x}{m}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \cdot e^{\left[x - \left(m + x + \frac{1}{2}\right)\right.}$$

$$\left.\left(\frac{x}{m} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{m^2} + \ldots\ldots\right)\right]$$

(ஏனெனில், m மிகப் பெரிய எண்ணாதலின் $\log\left(1+\frac{x}{m}\right)$-ஐ $\left(\frac{x}{m}\right)$-ன் படியில் விரித்து எழுதமுடியும்.)

$$i.e., \; P(X - m = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \cdot e^{\left[\frac{-x^2}{2m} - \frac{x}{2m}\right.}$$

$+ \left(\frac{1}{m}\right)$-ன் படி ஒன்றைவிட அதிகமாக உள்ள உறுப்புகள். $\Big]$

இதில், $\left(\frac{X - m}{\sqrt{m}}\right) = Z$ என்றிடுவோமானல்,

$$P\left[\frac{X - m}{\sqrt{m}} = z\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \cdot e^{\left[\frac{-z^2}{2} - \frac{z}{2\sqrt{m}}\right.}$$

$+ \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$-ன் படி ஒன்றைவிடஅதிகமாக உள்ள உறுப்புகள். $\Big]$

இங்கு, m முடிவிலியை அணுகும்போது, வலது புறமுள்ள e-ன் படி $\left(\frac{-z^2}{2}\right)$-ஐ அணுகும் என்று அறியலாம். மேலும் X-ல் ஏற்படும் ஒவ்வொரு மாற்றத்திற்கும் ஏற்ப, Z-ல் ஏற்படும்

மாற்றம் $\frac{1}{\sqrt{m}}$ என்று இருக்கும். m முடிவிலியை அணுகும் போது இச்சிறிய மாற்றத்தை dz என்று குறிப்பிடுவோம். எனவே Z-ன் மதிப்பு $\left(z - \frac{1}{2}dz,\ z + \frac{1}{2}dz\right)$ என்ற நுண்ணிய இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$ என்று கிடைக்கப்பெறும். இம் மதிப்பு இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு வகையீடு என்று தெரியும்.

மேலும் $(-\infty, \infty)$ என்ற முடிவிலா இடைவெளியில் அமையும் Z-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் இப்பரவல் ஒரு தொடர் பரவலாக இருக்கும் என்றும் அறியலாம்.

இவ்வாறு, Z-ன் பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாகும் என்று நிறுவியுள்ளோம்.

குறிப்பு: சிறப்பியல்புச் சார்புகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், இங்கு கண்ட தேற்றங்கள் இரண்டையும் எளிய முறையில் நிறுவக் கூடும் என்பதைப் பின் வருவனவற்றிலிருந்து அறியலாம்.

6·3 தேற்றம் 3. டீ மாவரின் தேற்றம்: பெர்னௌலி முயற்சிகளின் தொடர் முறையில், முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையாகிய n முடிவிலியை அணுகும்போது, $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ என்ற திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியின் பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலை நோக்கிக் குவியும்.

நிரூபணம்

ஈருறுப்புப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு $E\,[e^{itx}]$ என்று தெரியும்.

$$\therefore\ E\,[e^{itx}] = \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{\angle n}{\angle x\ \angle n-x} \cdot e^{itx} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \right]$$

$$= (pe^{it} + q)^n$$

எனவே $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ என்ற திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு,

$$\phi(t) = e^{-\left(\frac{inpt}{\sqrt{npq}}\right)} \cdot$$

$$\left[p \cdot e^{\left(\frac{it}{\sqrt{npq}}\right)} + q\right]^n$$ என்று கிடைக்கும்.

$$i.e., \ \phi(t) = \left[p \cdot e^{\left(\frac{iqt}{\sqrt{npq}}\right)} + q \cdot e^{\left(\frac{-ipt}{\sqrt{npq}}\right)}\right]^n$$

ஆனால் $$p \cdot e^{\left(\frac{iqt}{\sqrt{npq}}\right)} = p\left[1 + \frac{1}{\angle 1}\left(\frac{iqt}{\sqrt{npq}}\right) + \frac{1}{\angle 2} \cdot \left(\frac{iqt}{\sqrt{npq}}\right)^2 + \frac{1}{\angle 3}\left(\frac{iqt}{\sqrt{npq}}\right)^3 + \ldots\ldots \to \infty\right]$$

$$= \left[p + \frac{ipqt}{\sqrt{npq}} - \frac{1}{\angle 2} \cdot \frac{pq^2 t^2}{(\sqrt{npq})^2} - \frac{1}{\angle 3} \cdot i\frac{pq^3 t^3}{(\sqrt{npq})^3} + \ldots\ldots \to \infty\right]$$

llly $$q \cdot e^{-\left(\frac{ipt}{\sqrt{npq}}\right)} = \left[q - \frac{ipqt}{\sqrt{npq}} - \frac{1}{\angle 2}\frac{qp^2 t^2}{(\sqrt{npq})^2} + \frac{1}{\angle 3} \cdot i\frac{qp^3 t^3}{(\sqrt{npq})^3} + \ldots\ldots \to \infty\right]$$

$$\therefore \quad \phi(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{i\,pq}{\angle 3} \cdot \frac{(p-q)\cdot t^3}{(\sqrt{npq})^3} + \ldots\ldots \right]^n$$

$$i.e., \log \phi(t) = n \log\left[1 - \frac{t^2}{2n} + \sigma\left(t^3 \cdot n^{-\frac{2}{3}}\right)\right]$$

$$= n \cdot \left[\frac{-t^2}{2n} + \sigma\left(t^3 \cdot n^{-\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{-t^2}{2} + \sigma\left(t^3 \cdot n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

எனவே, t-ன் மதிப்பை நிலையானதாகக் கொண்டு, n முடிவிலியை அணுகும்போது, $\log \phi(t)$-ன் எல்லை மதிப்பு $\left(\frac{-t^2}{2}\right)$ என்று தெரிகிறது. அதாவது $\phi(t)$-ன் எல்லை மதிப்பு $\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)$ என்றாகும்.

ஆனால் $\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)$ என்பது திட்டமாக்கப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு என்று நமக்குத் தெரியும். ஆகையால், இங்கு Z-ன் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை நோக்கி அணுகும் என்று அறிகிறோம்.

6·4 தேற்றம் 4. பாய்சான் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, m, முடிவிலியை அணுகினால், $Z = \left(\frac{X-m}{\sqrt{m}}\right)$ என்ற சரிசம வாய்ப்பு மாறியின் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை நோக்கிக் குவியும்.

நிருபணம் :

பாய்சான் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு,

$$E(e^{itx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx} \left(\frac{e^{-m} \cdot m^{x}}{\angle x} \right)$$

$$= e^{-m} \cdot e^{(meit)}$$

$$= e^{m}(e^{it} - 1)$$

ஆகையால் $Z = \frac{X -}{\sqrt{}}$ என்ற திட்டமாக்கப்பட்ட மாறிக்கான சிறப்பியல்புச் சார்பு. $\phi(t)$ பின்வருமாறு அமையும்,

$$\phi(t) = e^{\left[- i t \sqrt{m} + m\left(e^{\frac{it}{\sqrt{m}}} - 1 \right) \right]}$$

$$i.e., \log \phi(t) = \left[- it \sqrt{m} + m \left(e^{\frac{it}{\sqrt{m}}} - 1 \right) \right]$$

$$= - it \sqrt{m} + m$$

$$\left\{ \left[1 + \frac{1}{\angle 1} \frac{(it)}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\angle 2} \left(\frac{it}{\sqrt{m}} \right)^{2} + \frac{1}{\angle 3} \left(\frac{it}{\sqrt{m}} \right)^{3} + \cdots\cdots \right. \right.$$

$$\left. \left. + \cdots\cdots \rightarrow \infty \right] - 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(i^{2} t^{2}) + \frac{1}{\angle 3} \frac{i^{3} t^{3}}{\sqrt{m}} + \cdots\cdots$$

$$i.e., \log \phi(t) = -\frac{1}{2} t^{2} + \sigma \left[t^{3} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \right]$$

எனவே t-ன் மதிப்பை நிலையானதாகக் கொண்டு, m முடிவிலியை அணுகுமானால், $\log \phi(t)$-ன் எல்லை மதிப்பு $\left(\frac{-t^2}{2}\right)$ என்றாகும்.

$$\text{ஆகையால்,}\quad \underset{m \to \infty}{Lt}\ \phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{என்று கிடைக்கும்.}$$

இது, திட்டமாக்கப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பாகும். அதாவது m முடிவிலியை அணுகும்போது Z என்ற மாறியின் பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாக மாறுகிறது என்று அறிகிறோம்.

6.5 மைய எல்லைத் தேற்றம் (Central Limit Theorem)

தேற்றம்

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n$ எனும் n தனித்தனி சரிசமவாய்ப்புப் புள்ளியியல் மாறிகள் அனைத்திற்கும் நிகழ்தகவும் பரவல் ஒன்றேதான் எனக்கொள்வோம். மேலும் இம்மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் கூட்டுச்சராசரி μ என்னும் திட்டவிலக்கம் σ என்றும் குறிப்பிடுவோம். பின்,

$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots X_n$ எனும் மாறி $N(n, \mu\sqrt{n}\,\sigma)$ என்ற இயல் நிலைப்பரவலை அணுகும்.

நிரூபணம்

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$ எனில்,

$E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\therefore\ E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu \quad \text{என்று கிடைக்கும்.}$$

$$111^{ry}\ \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = n\sigma^2 \quad \text{என்றாகும்.}$$

i.e.; X-ன் திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{n}\,\sigma$ என்று தெரிகிறது

இவற்றிலிருந்து, X-ன் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறி, $\frac{X - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$

$= \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma} \sum_{i=1}^{n} (Xi - \mu)$ என்று தெரிகிறது. இதில் $(Xi - \mu)$ எனும் விலக்கங்கள் அனைத்தும் ஒரே பரவலை உடையன என்று தெரியும். இந்த விலக்கங்களுள் ஏதேனும் ஒன்றின் சிறப்பு இயல்புச்சார்பை $\phi'(t)$ என்றும், திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியின் சிறப்பு இயல்புச்சார்பை $\phi(t)$ என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots X_n$ என்பன சார்பிலாத மாறிகளாயிருப்பதால் $E\left[e^{it(X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots + X_n - n\mu)}\right]$
$= E\left[e^{it(X_1 - \mu)}\right] \cdot E\left[e^{it(X_2 - \mu)}\right] \ldots\ldots E\left[e^{it(X_n - \mu)}\right]$
என்று கிடைக்கப்பெறும்.

$$\therefore\ \phi(t) = \phi'\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \cdot \phi'\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \ldots\ldots \phi'\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

$$= \left[\phi' \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)\right]^n$$

மேலும் $(Xi - \mu)$ எனும் மாறியின் முதல் இரண்டு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே 0, σ^2 என்று தெரியும். ஆகையால்,

$\phi'(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + 6(t^2)$ என்று பெறக்கூடும். இதில் t-க்குப் பதிலாக $\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$ என்றிட,

$\phi(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \in (n, t)\right]^n$ என்று கிடைக்கும்.

இங்கு t-ன் ஏதேனும் ஒரு நிலையான மதிப்புக்கு ஒப்ப, n முடிவிலியை அணுகும்போது $\in (n, t)$ எனும் சார்பு பூஜ்யத்தை அணுகும் என்று விளங்கும்.

$$\therefore \quad \log \phi(t) = n \cdot \log \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \cdot \in (n, t) \right]$$

இதிலிருந்து, t-ன் எந்த ஒரு முடிவுடைய மதிப்புக்கும் ஒப்ப n முடிவிலியை அணுகும்போது $\log \phi(t)$-ன் எல்லை மதிப்பு $\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ என்றாகும்.

அதாவது, $\log \phi(t) \longrightarrow \left(-\frac{t^2}{2}\right)$

$$\therefore \quad \phi(t) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

அதாவது ϕ (t)-ன் எல்லை மதிப்பு $\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$ என்று அறிகிறோம்.

ஆனால் $\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$-ஐ சிறப்பியல்புச் சார்பாக உடைய மாறி ஒரு திட்டமாக்கப்பட்ட இயல்நிலைமாறியாக இருக்கும் என்று தெரியும். எனவே X-ன் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியின் பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாக இருத்தல் வேண்டும் என அறிகிறோம். இவ்வாறு, மாறி, X என்பது, $N(n\mu, \sigma \cdot \sqrt{n})$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலை அணுகும் எனத் தெரிகிறது.

குறிப்பு : (அ) லிண்டர்பெர்க், லெவி என்பவர்கள் முதன் முதலில் மைய எல்லைத்தேற்றத்தை இந்த அமைப்பில் கூறி நிறுவினர்.

இத்தேற்றத்தில் $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots \ldots X_n$ என்ற மாறிகள் எல்லாம் ஒரே பரவலை உடையன என்று கொண்டுள்ளோம். மேலும் இம்மாறிகளின் பரவல்கள் இயல்நிலைப்பரவல்களாகத்தான் இருக்கவேண்டும் என்பது அவசியமில்லை. அவை எத்தகைய நிகழ்தகவுப் பரவல்களாக இருந்தபோதிலும் இத்தேற்றம் உண்மையாகும் என நிறுவப்பட்டுள்ளது.

(ஆ) இத்தேற்றத்திலிருந்து; $\bar{X} = \frac{1}{n} \quad (X_1 + X_2 + X_3 +$

$\ldots + X_n$) என்ற மாறி $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ எனும் இயல்நிலைப்பரவலை நோக்கி அணுகும் என்று அறியலாம்.

(இ) மைய எல்லைத்தேற்றத்தை வேறு சில அமைப்புகளிலும் கூறுவதுண்டு. பொதுவாக $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots X_n$ என்ற மாறிகளின் பரவல்கள் வெவ்வேறாக இருப்பினும் இத்தேற்றம் உண்மையாக இருக்கும் என நிறுவலாம். இவ்வாறு பின்வரும் அமைப்பிலும் தேற்றத்தைக் கூறலாம்.

(X_n) என்பது ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பிலாத சரிசமவாய்ப்பு மாறிகளின் தொடர்முறை எனவும், $E(X_i) = \mu_i$, $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ எனவும் கொள்வோம். பின் $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ என்றும், $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$ என்றும் இருந்தால் $\lim_{n \to \infty} P\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \leq x\right] = F(x)$ எனும் சார்பு ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் பரவல் சார்பாக இருக்கும்.

(ஈ) மைய எல்லைத் தேற்றம் நடைமுறையில் எவ்வாறு பயன்படுத்தப்படுகிறது என்பதை இனிவரும் எடுத்துக்காட்டுகள் நன்கு விளக்கும்.

6·5-1 நம்பத்தக்க தன்மை (Reliablity) : இந்த விண்வெளி யுகத்தில், கோள்களைப் பற்றி அறியவும் பல்வேறு அறிவியல் விவரங்களை சேகரிக்கவும் ஏவுகணைகள் மிகவும் பயன் படுகின்றன. ஏவுகணைகளை இத்தகைய முயற்சிகளில் ஈடுபடுத்துவதற்கு முன்னர், அவற்றை பல்வேறு சோதனைகளுக்கு உட்படுத்துகின்றனர். இவ்வாறு ஏவுகணைகளின் உறுதிப் பாட்டையும், தாங்கும் ஆற்றலையும், பரிசோதனைகளின் மூலம் தேர்ந்தறிந்து, அவற்றின் "நம்பத்தக்க தன்மை"யை நிர்ணயிக் கின்றனர். ஒரு ஏவுகணையை விண்ணில் அனுப்புவதில் பெறும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p எனில், p-ன் மூலம் ஏவுகணையின் "நம்பத்தக்க தன்மை"யைக் கண்டறிதல் வழக்கமாக உள்ளது.

பரிசோதனைகளின் விளைவாக ஒரு குறிப்பிட்ட வகையைச் சேர்ந்த ஏவுகணைகள் 90 சதவீதம் நம்பத்தகுந்தனவாக உள்ளன என்று கண்டறிந்ததாகக் கொள்வோம். பிறகு அத்தகைய

ஏவுகணைகளில் ஒரு சில மாற்றங்கள் செய்து திருத்தியமைக்கப் படுவதாகவும் கருதுவோம். இவ்வாறு திருத்தியமைக்கப்பட்ட ஏவுகணைகளுள், முதலில் ஏதேனும் 100 ஏவுகணைகளை பரிசோதித்துப் பார்த்ததில் 96ஏவுகணைகள் திருப்திகரமாக செயல்பட்டன என்றும், அடுத்து 64 ஏவுகணைகளை பரிசோதித்ததில் 62 ஏவுகணைகள் திருப்திகரமாக செயல்பட்டன என்றும் தெரிந்தால், திருத்தியமைக்கப்பட்ட ஏவுகணைகள் 90 சதவீதந்தான் நம்பத்தக்க தன்மை உடையன என்று எடுத்துக்கொண்ட கோட்பாட்டின் உறுதியை (அல்லது உறுதியின்மையை) இந்த இரண்டு வகை ஏவுகணைகளுள் எந்த வகையைச் சேர்ந்தவை அதிகமாக நிலை நாட்டும் என்பதை பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

100 ஏவுகணைகள் அடங்கிய தொகுதியில் சிறப்பாக செயல் பட்டவைகளின் எண்ணிக்கையை X_1 என்றும், 64 ஏவுகணைகள் கொண்ட தொகுதியில் சிறப்பாகச் செயல்பட்டவைகளின் எண்ணிக்கையை X_2 என்றும் குறிப்பிடுவோம். ஒரு ஏவுகணையின் நம்பத்தக்க தன்மையை p என்போம். X_1, X_2 என்பன ஈருறுப்புப் பரவலில் அமைவதாகக் கொள்வோமானால், அவற்றின் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறிகள் t_1, t_2 என்பனவற்றை,

$$t_1 = \frac{X_1 - 100p}{10\sqrt{pq}}, \; t_2 = \frac{X_2 - 64p}{8\sqrt{pq}}, \quad q = 1-p \quad \text{என்று}$$

பெறலாம்.

இதில் $p = 0{\cdot}9$, $X_1 = 96$, $X_2 = 62$ என்றிட; $t_1 = 2$, $t_2 = 1{\cdot}83$ என்று கிடைக்கப்பெறும்.

இங்கு t_1-எனும் திட்டமாக்கப்பட்ட மாறியின் பரவல் $N(0, 1)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலாதலின், t_1-ன் கண்டறியும் மதிப்பு 2-க்குச் சமமாகவோ அல்லது 2-ஐ விட அதிகமாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$P[t_1 \geq 2] = 0{\cdot}023$ என்று அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம்.

இதேபோன்று, $P[t_2 \geq 1{\cdot}83] = 0{\cdot}034$ என்று கிடைக்கும்.

எனவே, திருத்தியமைக்கப்பட்ட ஏவுகணைகள் பழைய ஏவுகணைகளைவிட அதிகமாக நம்பத்தகுந்தன. என்பதற்கு 64 முயற்சிகளுள் 62 வெற்றி கிடைப்பதைவிட 100 முயற்சிகளுள் 96 வெற்றி கிடைப்பதுதான் சிறந்த சான்றாக அமைகிறது என்று கண்டுகொள்ளலாம். இவ்வாறு, இயல் நிலைப் பரவலைப் பயன் படுத்துவதன் மூலம் இம்முடிவை நாம் எளிதில் பெற முடிகிறது.

6 5-2. பிரௌனின் இயக்கமும், இயைபிலா (அல்லது தொடர்பின்மை) நடையும் : (Brownian Motion and Random Walk) **(அ) பிரௌனின் இயக்கம் :** பிரௌன் எனும் ஆங்கில தாவர இயல் வல்லுநர் 1827-ஆம் ஆண்டு துகள்களின் (அணுக் கூறுகளின்) இயக்கத்தைப் பற்றிய ஆராய்ச்சியில் ஈடுபட்டிருந்த போது, பின்வரும் உண்மையைக் கண்டறிந்தார்.

ஏதேனும் ஒரு திரவத்தினுள் மூழ்கியிருக்கும் ஒரு துகள் எண்ணிலடங்காத ஒழுங்கற்ற இயக்கங்களை உடையதாகக் காணப்படுகிறது. இத்தகைய இயக்கங்களை நுண்ணோக்காடியின் உதவியினுல் தெளிவாகக் கண்டறியலாம். பிரௌன் கண்டு பிடித்தமையால் இவற்றை பிரௌனின் இயக்கங்கள் என்பர்.

இதேபோன்று காற்றில் மிதந்து செல்லும் புகைத் துகள்களும் இந்த குறிப்பிடத்தக்க நிகழ்ச்சிகளுக்குள்ளாகின்றன என்றும் கண்டுள்ளனர். இத்தகைய பிரௌனின் இயக்க நிகழ்ச்சியின் விளக்கமானது, புள்ளி விவர இயக்கவியலுக்கும், இயக்கப் பண்பு கொள்கைக்கும் கிடைத்த பெரும் வெற்றியாகக் கருதப்படுகிறது.

மேலும் 1905-ம் ஆண்டு, ஐன்ஸ்டின் என்ற விஞ்ஞானி, பிரௌனின் இயக்கத்தைப்பற்றி விளக்கிய உண்மை இங்கு குறிப்பிடத்தக்கதாகும். அவர், "துகள்களைச் சுற்றியுள்ள பொருள் களின் அணுத்திரண்மங்கள், அத்துகள்களைத் தொடர்ந்து தாக்கு கின்றன என்று கருதுவதன் மூலம், பிரௌனின் இயக்கத்தை நன்கு விளக்குவதற்கு ஏதுவாகும்," என்று குறிப்பிட்டுள்ளார். ஐன்ஸ்டினின் இக்கொள்கையானது பெர்ரின் (Perrin) என்பவரால் பரிசோதனையின் வாயிலாக உறுதியாக்கப் பட்டுள்ளது.

பிரௌனின் இயக்கத்தில், ஆரம்ப நிலையிலிருந்து t நிமிடங் களில் ஏற்படும் ஒரு துகளின் இடப் பெயர்ச்சியை S_t என்று குறிப்பிடுவோம்.

$$\text{பின் } S_t \text{ என்ற மாறி } f(x) = \left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{-x^2}{4Dt}}$$

என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சர்பை உடையதாக இருக்கும் என்று ஐன்ஸ்டின் நிறுவியுள்ளார். இங்கு D என்பது "விரிவகற்சிக் குணகம்" அல்லது "ஊடுபரவல் குணகம்" (Diffusion coefficient) எனப்படும் ஒரு மாறிலியாகும். இம்மாறிலியின் மதிப்பு,

துகள்களைச் சூழ்ந்துள்ள பொருளின் தனி வெப்பத்தையும், உராய்வு குணகத்தையும் பொறுத்து அமையும்.

மேலே குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிலிருந்து, S_t என்ற மாறியின் பரவல் இயல்நிலையானது என்றும், அதன் கூட்டுச் சராசரி பூஜ்யம் என்றும், மாறுபாடு $(2Dt)$ என்றும் அறியக்கூடும்.

எனவே $E[S_t^2] = 2Dt$. இது ஒரு முக்கியமான முடிவாகும். ஏனெனில், இம்முடிவிலிருந்து, பிரௌனின் இயக்கத்தில் உள்ள ஒருதுகளின் கூட்டுச் சராசரி வர்க்க இடப் பெயர்ச்சியின் மதிப்பு t-க்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும் எனத் தெளிவாகிறது.

இயைபிலா நடைக்குட்பட்ட ஒரு துகள் இத்தகைய இயக்கத்திற்கான ஒரு மாதிரியாக அமையும் என்றும் கண்டுள்ளனர். இத்தகைய நடையைப் பற்றி இனி காண்போம் :

(ஆ) இயைபிலா நடை

X எனும் மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, $E(X)$-ன் மதிப்பு பூஜ்யம் என்றும், மாறுபாடி $E(X^2)$-ன் மதிப்பு ஒரு முடிவுடைய எண் என்றும் கொள்வோம். மேலும் $X_1, X_2, X, \ldots\ldots\ldots X_n$ என்ற n சார்பிலா சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளும், X-ஐப் போன்ற பரவல்களை உடையன என்றும் கருதுவோம்.

ஒரு நேர்கோட்டின் மீது இயைபிலா நடையை நிகழ்த்தும் ஒரு துகளின் i-ஆவது அடியில் ஏற்படும் இடப் பெயர்ச்சியை X_i என்று குறிப்போமானால்,

$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots + X_n$ என்பது n அடிகளுக்குப் பிறகு அத்துகளின் மொத்த இடப் பெயர்ச்சியைக் குறிக்கும்.

ஆகையால், $E(S_n) = E[\Sigma X_i] = \Sigma E(X_i) = 0$ என்றும்

$$E(S_n^2) = E[(\Sigma X_i)^2] = \Sigma E(X_i^2) = n E(X^2($$

என்றும் பெறக் கூடும். இவற்றிலிருந்து, இயைபிலா நடையில் செல்லும் ஒரு துகளின் சராசரி வர்க்க இடப் பெர்ச்சியின் மதிப்பு, அந்நேரத்திற்குள் சென்றுள்ள அடிகளின் எண்ணிக்கைக்கு நேர் விகிதத்தில் அமைந்திருக்கும் என்று அறியலாம் மேலும். S_n-ன் பரவல் ஏறக்குறைய ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்திருப்பதால், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் தோராய மதிப்பை

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi\ Bn}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2Bn}}$$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். இங்கு $B = E(X^2)$ எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

S_n-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு இவ்வாறு அமைவதற்குப் போதுமான ஒரு நிபந்தனையாக

"X என்ற சரிசம வாய்ப்பு மாறி ஒருவர்க்கமான தொகை யிடத்தக்க நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பினை பெற்றிருக்க வேண்டும்" என்பதை நிறுவிக் காட்டலாம்.

மேலும் S_n என்பது ஒரு இயல் நிலை நிகழ்தகவுப் பரவலின் ஏறக்குறைய அமைந்துள்ளமையால், அதன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை அசனுடைய கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து 3 அல்லது 4 திட்டவிலக்கங்களுக்கு மேல் கண்டறிய முடியும் என்பதற்கான வாய்ப்பு சிறிது கூட கிடையாது எனவே, பூஜ்யத்தைக் கூட்டுச் சராசரியாகக் கொண்ட, தனிப்பட்ட அடிகளைக் கொண்டு அமையும் ஒரு இயைபிலா நடையில், n அடிகளுக்குப் பிறகு ஆதியிலிருந்து உள்ள தூரம் $(4\sqrt{n}\,\sigma)$-ஐ விட அதிகமாக இருக்கும் என்பது நிகழக் கூடியதல்ல.

6·6 நிகழ்தகவில் ஒருங்கல் குவிதல் (Convergence in Probablity)

வரையறை

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n$ எனும் சரிசம வாய்ப்பு மாறிகள் ஒரு தொடர் முறையில் அமைவதாகக் கொள்வோம். X_n என்ற மாறியின் பரவல் சார்பை $F_n(x)$ என்றும், அதன் சிறப்பியல்புச் சார்பை $\phi_n(t)$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும் $\in$ என்பது முன்னதாகவே கொடுக்கப்படும் ஏதேனும் ஒரு மிகை எண் என்க. பின், n முடிவிலியை அணுகும்போது,

$|X_n - e| > \in$ எனும் தொடர்பின் நிகழ்தகவு பூஜ்யத்தை அணுகுமானால், X_n என்ற மாறி e எனும் மாறிலியை நோக்கி நிகழ்தகவில் ஒருங்கும் (அல்லது குவியும்) என்று கூறப்படும்.

X_n என்ற மாறி c-ஐ நோக்கி நிகழ்தகவில் ஒருங்குவதற்கான தேவையானதும், போதுமானதுமான ஒரு நிபந்தனையாவது ;

e-க்குச் சமமில்லாத x-ன் ஒவ்வொரு நிலையான மதிப்புக்கும், $F_n(x)$ எனும் பரவல் சார்பு $\in(x-e)$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட

பரவல் சார்பை நோக்கி அணுகவேண்டும் என்பதுதான் இந் நிகழ்தகவு.

இங்கு $x - e < 0$ எனில் $\in (x-e) = 0$ என்றும்,

$x - e \geq 0$ எனில் $\in (x-e) = 1$ என்றும் இருக்குமாறு $\in (x - e)$ என்ற சார்பை வரையறுக்கிறோம்.

இதற்கு ஒப்பான சிறப்பியல்புச் சார்புக்கேற்ற நிபந்தனை யாவது.

t-ன் ஒவ்வொரு நிலையான மதிப்புக்கும், $\phi_n(t)$ என்ற சிறப்பியல்புச் சார்பு e^{eit} என்ற எல்லையை அணுகுதல் வேண்டும்.

6 6-1 செபிசெவ் தேற்றம் (Tchebycheff's Theorem)

$X_1, X_2, X_3, \ldots X_n \ldots$ என்பன சரிசம வாய்ப்பு இயல்நிலை மாறிகளாக இருக்கட்டும். X_n என்ற மாறியின் கூட்டுச்சராசரியை μ_n என்றும், திட்டவிலக்கத்தை σ_n என்றும் கொள்வோம். பின், n முடிவிலியை அணுகும்போது σ_n பூஜ்யத்தை அணுகுமானால், $(X_n - \mu_n)$ எனும் மாறி பூஜ்யத்தை நோக்கி நிகழ்தகவில் ஒருங்கும்.

நிரூபணம்

செபிசெவ் சமனின்மையை $(X_n - \mu_n)$ என்ற மாறிக்குப் பயன்படுத்துவோமானால்,

$$P[\,|X_n - \mu_n| > \in] \leq \frac{\sigma_n^2}{\in^2}$$ என்று கிடைக்கும்.

(இங்கு $\in$ என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை எண்ணாகும்).

ஆனால் n முடிவிலியை அணுகும்போது, σ_n-ன் மதிப்பு பூஜ்யத்தை அணுகும் என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளமையால்,

$|X_n - \mu_n| > \in$ என்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு பூஜ்யத்தை அணுகும் என்று தெரிகிறது.

எனவே, $(X_n - \mu_n)$ என்ற மாறி பூஜ்யத்தை நோக்கி நிகழ்தகவில் ஒருங்கும் என்று அறிகிறோம்.

6 6-1 (a) கிளைத்தேற்றம் : $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots X_n$ என்பன ஒன்றோடொன்று தொடர்பிலா தனித்தனி மாறிகள் என்க. மேலும்,

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ என்று கொள்வோம்.

பின் $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 6(n^2)$ என்றால், $(\bar{X} - \bar{\mu})$ என்னும் மாறி பூஜ்யத்தை நோக்கி நிகழ்தகவில் ஒருங்கும்.

இங்கு $\bar{X}$-ன் கூட்டுச்சராசரி $\bar{\mu}$ என்றும், திட்டவிலக்கம் $\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$ என்றும் தெரியும். எனவே எடுத்துக்கொண்ட கொள்கைப்படி n முடிவிலியை அணுகும்போது, இந்தத் திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பு பூஜ்யத்தை அணுகும் என்று அறியலாம். இவ்வாறு, மேலே நிறுவிய தேற்றப்படி $(\bar{X} - \bar{\mu})$ என்பது பூஜ்யத்தை நோக்கி நிகழ்தகவில் ஒருங்கும் என்று கிடைக்கப் பெறும்.

குறிப்பு : X_n என்ற மாறிகளுக்கு முடிவுடைய திட்டவிலக்கங்கள் இல்லையென்று கொள்வோமானாலும், இக்கிளைத் தேற்றத்திற்கு ஒப்பான ஒரு முடிவை நாம் பெறக்கூடும். இதைப் பின்வரும் தேற்றத்தின் மூலம் அறியலாம். ஆனால் இத்தேற்றத்தில் X_n என்ற மாறிகள் அனைத்தும் ஒரே நிகழ்தகவுப் பரவலை உடையன எனக் கருதுவோம்.

6·6-2 கிஞ்சின் தேற்றம் (Khintchine's Theorem): $X_1, X_2, X_3 \ldots$ என்பன தனித்தனி சரிசம வாய்ப்பு மாறிகள் என்க. இம்மாறிகள் அனைத்தும் $F(x)$ எனும் ஒரே பரவல் சார்பை உடையன எனக் கொள்வோம். மேலும் $F(x)$-ன் கூட்டுச்சராசரி μ எனும் முடிவுடைய எண்ணாக இருக்கட்டும். பின், $\bar{X} = \sum_{K=1} X_k$ என்ற மாறி μ-ஐ நோக்கி நிகழ்தகவில் ஒருங்கும்.

நிரூபணம்

X_i என்ற மாறிகளின் பொதுப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பை $\phi(t)$ எனக் குறிப்பிடுவோம். பின் $\bar{X}$ எனும் மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு;

$$\varphi'(t) = [\phi(t/n)]^n \text{ என்று கிடைக்கப் பெறும்.}$$

$\phi(t)$ என்ற சார்பை, $t = 0$ எனும் புள்ளிக்கருகில் மெக்லாரின் தொடரில் விரித்தெழுதுவோமானால்,

$$\phi(t) = 1 + \frac{it}{\angle 1} + \sigma(t) \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

$$\therefore \quad \log \phi'(t) = n \log [\phi(t/n)]$$

$$= n \cdot \log \left[1 + \frac{\mu\, it}{n \cdot \angle 1} + \sigma\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= n \cdot \left[\frac{\mu\, it}{n} + \sigma\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$: [மடக்கைத் தொடரைப் பயன்படுத்த]

இதிலிருந்து, t ன் மதிப்பை நிலையானதாகக் கொண்டு. n-ஐ முடிவிலியை அணுகச் செய்தால், $\log \phi'(t)$-ன் எல்லை மதிப்பு $(\mu\, it)$ என்று பெறலாம். அதாவது $\phi'(t)$-ன் எல்லை மதிப்பு $e^{\mu\, it}$ என்றாகும்.

எனவே, நிகழ்தகவு ஒருங்கல் தேற்றப்படி, $\bar{X}$ என்ற மாறி μ-ஐ நோக்கி நிகழ்தகவில் ஒருங்கும் என்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு : இத்தேற்றத்தைப் பிறிதொரு முறையிலும் கூறலாம்: அதாவது, ஒரு பொதுவான பரவலையுடைய தனித்தனி சரிசம வாய்ப்பு மாறிகளின் தொடர் முறையை (X_i) என்க. மேலும் $\mu = E(X_i)$ எனும் எதிர்நோக்கல்கள் உளதாயிருக்கும் என்க. பின் $\in$ என்ற ஒவ்வொரு மிகை எண்ணுக்கும் ஒப்ப, n முடிவிலியை அணுகும்போது,

$$P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n}{n} - \mu\right| > \in\right]\text{-ன் எல்லை}$$

மதிப்பு பூஜ்யமாகும்.

இத்தேற்றத்தையே "பெரிய எண்களின் விதி" என்றும் கூறுவர்.

6·6-3 ஒருங்கல் தேற்றம் : (X_i) என்பது சரிசம வாய்ப்பு புள்ளியியல் மாறிகளின் ஒரு தொடர்முறை என்க. X_i என்ற

மாறியின் பரவல் சார்பை $F_i\ (X)$ என்க. n முடிவிலியை அணுகும்போது $F_n\ (x)$ என்ற சார்பு $F\ (x)$-ஐ நோக்கிக் குவிவதாகக் கொள்வோம்.

இதேபோன்று (Y_i) என்பது வேறு ஒரு தொடர் முறையாக இருக்கட்டும். இங்கு Y_n என்ற மாறி c எனும் மாறிலியை நோக்கி நிகழ்தகவில் குவியும் என்றும் கொள்வோம்.

மேலும்,
$$\alpha_n = X_n + Y_n,$$
$$\beta_n = X_n \cdot Y_n,$$
$$\gamma_n = \frac{X_n}{Y_n}$$ என்றிருக்கட்டும்.

பின்,

(அ) α_n என்பதன் பரவல் சார்பு $F\,(x - c)$-ஐ நோக்கிக் குவியும்.

(ஆ) $c > 0$ என்றிருப்பின், β_n-ன் பரவல் சார்பு $F\left(\frac{x}{c}\right)$-ஐ நோக்கிக் குவியும்.

(இ) γ_n-ன் பரவல் சார்பு $F\,(cx)$-ஐ நோக்கிக் குவியும்.

(இங்கு கொடுக்கப்பட்ட மாறிகள் சார்பிலாதன என்று எடுத்துக் கொள்ளப்படவில்லை என்பது முக்கியமாக குறிப்பிடப் படவேண்டும்.)

7. தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவல்கள்—தொடர்ச்சி

7.1 செவ்வகப் பரவல் (அல்லது) சீரான பரவல் (Rectangular or Uniform Distribution)

(அ) வரையறை :

a, b என்பன இரண்டு மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும் X எனும் தொடர் சரிசம வாய்ப்பு மாறி, (a, b) என்ற வீச்சில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு ஒரு மாறு எண்ணாக இருப்பின், பின் X-ன் பரவலை ஒரு செவ்வகப் பரவல் என்கிறோம்.

செவ்வகப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு k-எனில், k-ன் மதிப்பைப் பின் வருமாறு பெறலாம்.

$$\int_a^b k\, dx = 1$$ என இருத்தல் வேண்டும்.

$$i.e., \quad k(b-a) = 1\ ; \quad i.e., \ k = \frac{1}{b-a}, \quad (b > a)$$

$\therefore$ நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு; $f(x) = \dfrac{1}{b-a}, a \leq x \leq b.$

(ஆ) குவிவுப் பரவல் சார்பு:

இப்பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பை $F(x)$ என்க.

$$\therefore \quad F(x) = P(a \leq X \leq x)$$

$$= \int_a^x \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \left(\frac{x-a}{b-a}\right), \; a \leq x \leq b.$$

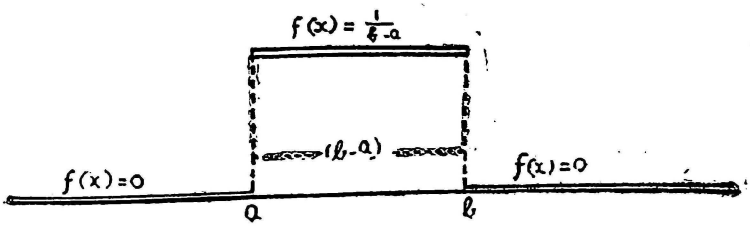
111^{rly} $F(x) = 1, \; x > b.$

$= 0, \; x < a.$

(இ) நிகழ்தகவு வளைவரை

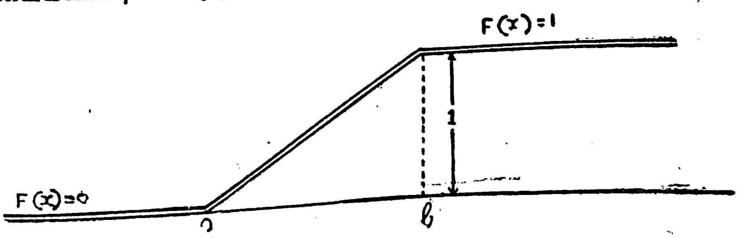
செவ்வகப் பரவலின் நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு;

$y = \dfrac{1}{b-a}$ என்பதாகும்.



படம் 13.

இது x-அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்கோடாகும். இந்த வளைவரையின் அமைப்பையும், குவிவுப் பரவல் வளைவரையின் அமைப்பையும் படத்தில் காணலாம்.



படம் 14.

(ஈ) விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

கூட்டுச் சராசரி, $\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$

$$= \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$111^{rly} \quad \mu'_2 = \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \left(\frac{b^2 + ba + a^2}{3}\right)$$

$$\therefore \text{ var}(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7.2 காஷியின் பரவல் (Cauchy's Distribution)

(அ) வரையறை :

X எனும் புள்ளியியல் மாறி ஏற்கும் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் ஒப்ப, அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு

$$f(x) = \frac{1}{\pi[1 + (x-\mu)^2]}$$ என்றிருப்பின், X-ன் பரவலை காஷி பரவல் என்கிறோம்.

அதாவது, $-\infty < x < \infty$ எனும் போது இப்பரவலின் நிகழ்தகவு வகையீடு

$$dP = \frac{dx}{\pi[1 + (x-\mu)^2]}$$ என்று அறியலாம்.

(ஆ) குவிவுப் பரவல் சார்பு

$F(x)$-ன் மதிப்பு வருமாறு :

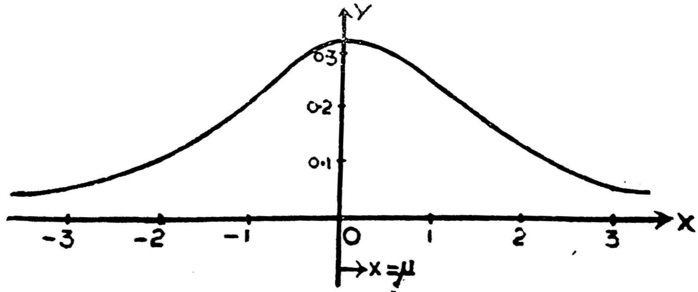
$$F(x) = \int_{-\infty}^{X} \frac{dx}{\pi[1 + (x-\mu)^2]} = \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}(x-\mu) + \pi/2\right]$$

(இ) நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு

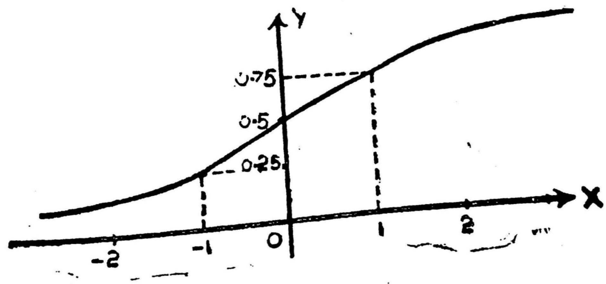
$$y = \frac{1}{\pi[1 + (x-\mu)^2]}$$ என்பதாகும்.

இவ்வளைவரை $x = \mu$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்து சமச்சீருள்ளதாக இருக்கும். ஆகையால் $x = \mu$ எனும் மதிப்பு இப்பரவலின் இடைநிலை மதிப்பாகும். மேலும் $x = \mu$, எனும்

போது y-ன் மதிப்பு மீப் பெரிதாக இருப்பதால், இப்புள்ளியே பரவலின் முகடாகவும் உள்ளது



படம் 15.



படம் 16.

(ஈ) விலக்கப் பெருக்குத் தொகை :

ஆதியை மையமாகக் கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, $\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^r \cdot dx}{\pi\,[1+(x-\mu)^2]}$ என்று தெரியும்.

ஆனால் எந்த ஒரு இடைவெளியிலும் இத்தொகை குவியாது ; ஆகையால் இத்தொகை உளதாயிருக்காது. எனவே விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் உளதாயிருக்கமாட்டா என்று அறியலாம். இவ்வாறு, நிகழ்தகவுப் பரவல்களுக்கான பண்புகள் அனைத்தையும் இப்பரவல் பெற்றிருக்காவிடினும் இதுவும் ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவல்தான் என்பது குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

(உ) சிறப்பியல்புச் சார்பு

செவ்வகப் பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு $\phi(t)$ எனில்,

$$\phi(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} \cdot dx}{\pi[1 + (x - \mu)^2]}$$

வலது புறத்தொகையில், $y = (x - \mu)$ என்றிட,

$$\phi(t) = \frac{e^{i\mu t}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity}}{1 + y^2} dy \text{ என்றாகும்.}$$

$$= \frac{e^{i\mu t}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos ty + i \sin ty)}{(1 + y^2)} dy$$

$$= \frac{e^{i\mu t}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ty \, dv}{1 + y^2} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ty}{1 + y^2} dy \right]$$

ஆனல், $\frac{\sin ty}{(1 + y^2)}$ என்பது ஒற்றைச் சார்பாக இருப்பதால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ty}{(1 + y^2)} dy = 0 \text{ என்றிருக்க வேண்டும்.}$$

மேலும், $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ty}{(1 + y^2)} dy = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ty}{1 + y^2} dy$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^{-|t|} \text{ என்று}$$

நிறுவலாம்.

$$\therefore \quad \phi(t) = \frac{e^{i\mu t}}{\pi} \cdot \pi e^{-|t|} = e^{(i\mu t - |t|)}$$

இச்சார்பை (it)-ன் படியில் எழுத முடியாது என்பது நன்கு விளங்கும். ஆகையால் இப்பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் இருக்கமாட்டா என்று சிறப்பியல்புச் சார்பின் மூலமும் அறியலாம்.

7 3 காமா பரவல் (Gamma Distribution)

(அ) வரையறை :

X என்ற சரிசம வாய்ப்பு தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி ச்சார்பு.

$f(x) = \frac{1}{\Gamma(l)} \cdot x^{l-1} e^{-x}, \quad x \geq 0, l \geq 0$ என்றிருப்பின் அம் மாறியின் பரவலை "காமா பரவல்" என்று கூறுகிறோம். X-ஐ "காமா மாறி" என்று கூறுவதும் உண்டு. இதை $V(l)$ மாறி என்று குறிப்பிடுவதுண்டு. இங்கு l என்பது காமா பரவலின் துணையலகு எனப்படும்.

[$\Gamma(l) = \int_0^\infty e^{-x} \; x^{l-1}$ என்ற தொகையாகும்.

மேலும் $\Gamma(l) = (l-1)\Gamma(l-1) = (l-1)(l-2)\Gamma(l-2) = \ldots$]

அடர்த்திச் சார்பின் பண்புகளாவன :

(i) $x \geq 0, l \geq 0$ எனும்போது, $f(x) \geq 0$.

$$(ii) \quad \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(l)} x^{l-1} \; e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty x^{l-1} \; e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l)} \Gamma(l) = 1$$

(ஆ) காமா பரவலின் "குவிவுப் பரவல் சார்பு" $F(x)$ எனில்,

$$x \geq 0 \text{ எனும்போது, } F(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(l)} x^{l-1} e^{-x} dx$$

என்றும்,

$x < 0$ எனும்போது $F(x) = 0$ என்றும் இருக்கும்.

$F(x)$-ஐ முடிவுறு காமா சார்பு என்பர்.

(இ) காமா பரவலின் நிகழ்தகவு வளைவரை

பரவலின் அடர்த்திச் சார்பு, $f(x) = \dfrac{x^{l-1} e^{-x}}{\Gamma(l)}$

பின் நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு, $y = f(x)$ என்பதாம் இவ்வளைவரையின் பண்புகள் வருமாறு:

(*i*) X-அச்சு இதன் தொலைத் தொடுகோடாக இருக்கும்.

(*ii*) $l > 1$ எனில் $x = l - 1$ என்ற புள்ளி பரவலின் முகடாக இருக்கும்,

(*iii*) $l > 2$ எனில் X-அச்சு வளைவரையை ஆதியில் தொடும்.

(*iv*) $1 < l < 2$ எனில் Y-அச்சு வளைவரையை ஆதியில் தொடும்.

(*v*) $0 < l < 1$ எனில் X-அச்சு Y-அச்சு இரண்டுமே வளைவரையின் தொலைத் தொடுகளாக இருக்கும்.

(ஈ) காமா பரவலின் கூட்டுச்சராசரியும் மாறுபாடும்

கூட்டுச் சராசரி, $\mu = E(x)$

$$= \int_0^{\infty} x \frac{e^{-x} \cdot x^{l-1}}{\Gamma(l)} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{l} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l)} \Gamma(l+1) = \frac{l\,\Gamma(l)}{\Gamma(l)} = l$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{e^{-x} \cdot x^{l-1}}{\Gamma(l)} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{l+1} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l)} \cdot \Gamma(l+2) = \frac{(l+1) \cdot l \cdot \Gamma(l)}{\Gamma(l)}$$

$$= l(l+1)$$

∴ மாறுபாடு, $\sigma^2 = E(X^2) = [E(X)]^2$

$$= l(l+1) - l^2 = l$$

திட்டவிலக்கம், $\sigma = \sqrt{l}$

2. விலக்கப்பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு :

ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு $M(t)$ என்றால்,

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(l)} e^{-x} \; x^{l-1} \; e^{tx} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(l)} \cdot x^{l-1} \cdot e^{-(1-t)x} dx$$

இதில் $y = (1-t)x$ என்றிட, $|t| > |$ என்றால், y-ன் வீச்சும் $(0, \infty)$ என்று கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad M(t) = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty e^{-y} \cdot \frac{y^{l-1}}{(1-t)^{l-1}} \cdot \frac{dy}{(1-t)}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^l \; (l)} \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot y^{l-1} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{(1-t)^l \; \Gamma(l)} \cdot \Gamma(l) = (1-t)^{-l}$$

ஆகையால் ஆதியை மையமாகக் கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, $\mu'_r = \frac{d^r}{dt^r}[M(t)]_{t=0} = l(l+1)$ $(l+2) \ldots\ldots (l+r-1)$ என்று கிடைக்கும்.

(ஊ) **காமா பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பு** $k(t)$ என்றால், பின்

$$k(t) = \log_e M(t)$$
$$= \log [(1-t)^{-l}]$$
$$= l \cdot \log(1-t)$$
$$= l \cdot \left[t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots\ldots\ldots + \infty \right]$$

ஆகையால், k_1, k_2, k_3 .... என்பன காமா பரவலின் குவிவுகளைக் குறிக்குமாயின்.

$k_1 = k_2 = l$ என்றும்,

$k_3 = l \; \underline{|2}, k_4 = l \cdot \underline{|3}, \ldots\ldots k_r = l \cdot \underline{|r-1}$ என்றும் தெரிகிறது. அதாவது, $r > 2$ எனில், $k_r = l \; \underline{|r-1}$ என்றாகும்.

7·3-1. தேற்றம் 1: l, m என்பனவற்றை துணை அலகுகளாகக் கொண்ட இரண்டு சார்பிலா காமா மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையும், $(l+m)$-ஐ துணை அலகாகக் கொண்ட, ஒரு காமா மாறியாக இருக்கும்.

இத்தேற்றத்தை இரண்டு வழிகளில் நிரூபிக்கமுடியும். முதலாவதாக அடிப்படைத் தத்துவத்திலிருந்தும், அடுத்து விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பைப் பயன்படுத்துவதன் மூலமும் இதை நிறுவலாம்.

(i) நிரூபணம் :

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு காமா மாறிகளையும் X, Y என்க.

$Z = X + Y$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்,

இப்பொழுது, $\left(y - \frac{1}{2} dy, y + \frac{1}{2} dy\right)$ என்ற நுண்ணிய இடை வெளியில் Y ஒரு நிலையான மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும் என்று கருதுவோமானுல், பின் $dz = dx$ என்று கிடைக்கும்.

X-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு $\left(x - \frac{1}{2} dx, x + \frac{1}{2} dx\right)$ என்ற வீச்சில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP_1 = \frac{e^{-x} \cdot x^{l-1}}{\Gamma(l)} \cdot dx \text{ என்று தெரியும்.}$$

ஆகையால் Y-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு ஒப்ப, Z-ன் மதிப்பு $\left(z - \frac{1}{2} dz, z + \frac{1}{2} dz\right)$ என்ற வீச்சில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$dP_1 = \frac{e^{-z-y} \cdot (z - y)^{l-1}}{\Gamma(l)} dz \text{ என்ருகும்.}$$

ஆனுல், $\left(y - \frac{1}{2} dy, y + \frac{1}{2} dy\right)$ என்ற இடைவெளிக்குள் Y-ன் ஒரு மதிப்பு இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP_2 = \frac{e^{-y} \cdot y^{m-1}}{\Gamma(l)} dy \text{ என்றிருக்கும்.}$$

எனவே Z-ம், Y-ம் முறையே dz, dy என்ற இடைவெளிகளில் ஒரே சமயத்தில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு, அவற்றின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு

$$= dP_1 \cdot dP_2$$

$$= \frac{e^{-(z-y} \cdot (z - y)^{l-1}}{\Gamma(l)} dz \cdot \frac{e^{-y} \cdot y^{m-1}}{\Gamma(m)} dy$$

$$= \frac{e^{-z} \cdot d^{z}}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)} \cdot (z-y)^{l-1} \cdot y^{m-1} \cdot dy$$

இதிலிருந்து, Y-ன் எந்த மதிப்பிற்கும், $\left(z - \frac{1}{2}dz, z + \frac{1}{2}dz\right)$ என்ற இடைவெளியில் Z இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP = \frac{e^{-z} \cdot dz}{\Gamma(l)\Gamma(m)} \cdot \int_0^z (z-y)^{l-1} \cdot y^{m-1} \cdot dy \text{ என்றாகும்.}$$

வலதுபுறமுள்ள தொகையில் $y = tz$ என்றிட, $dy = z\,dt$ ஆகும்.

$$\therefore \quad dP = \frac{e^{-z}\,dz}{\Gamma(l)\Gamma(m)} \cdot \int_0^1 z^{l-1}(1-t)^{l-1} \cdot t^{m-1} \cdot z^{m-1}\,z\,dt$$

$$= \frac{e^{-z}\,dz}{\Gamma(l)\Gamma(m)} \cdot z^{l+m-1} \cdot \int_0^1 (1-t)^{l-1} \cdot t^{m-1} \cdot dt$$

$$= \frac{e^{-z} \cdot z^{l+m-1}}{\Gamma(l)\Gamma(m)} \cdot dz\,\beta(l, m)$$

$$= \frac{e^{-z} \cdot z^{l+m-1}}{\Gamma(l)\Gamma(m)} \cdot dz\,\frac{\Gamma(l)\cdot\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}$$

$$= \frac{e^{-z} \cdot z^{l+m-1}}{\Gamma(l+m)} \cdot dz.$$

எனவே Z என்பது ஒரு $\gamma(l+m)$ மாறி என்று அறிகிறோம்.

(ii) நிரூபணம் : (பிறிதொரு முறை)

l, m என்ற துணை அலகுகளை உடைய இரண்டு சார்பிலா காமா மாறிகளை முறையே X, Y என்க. ஆதியை மையமாகக் கொண்ட, X, Y-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்புகளை முறையே $M_x(t), M_y(t)$ என்று குறிப்பிடுவோமானால்,

$M_x(t) = (1-t)^{-l}$; $M_y(t) = (1-t)^{-m}$. $|t| < 1$ என்று தெரியும்.

$Z = X + Y$ என்றால், Z-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு,

$M_z(t) = M_x(t) \cdot M_y(t)$ என்று நிறுவியுள்ளோம்

அதாவது, $M_z(t) = (1-t)^{-l} \cdot (1-t)^{-m}$

i.e., $M_z(t) = (1 - t)^{-(l+m)}$

எனவே, Z என்பது $(l + m)$-ஐ துணை அலகாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறி என்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு : (i) இத்தேற்றத்தை பல சார்பிலா காமா மாறிகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும் விரித்துக் கூறலாம். இவ்வாறு,

முறையே $l_1, l_2, \ldots l_n$ என்பனவற்றை துணை அலகுகளாக உடைய $X_1, X_2, \ldots X_n$ எனும் காமா மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையும் ஒரு காமா மாறியாக இருக்கும். மேலும் அதன் துணை அலகு $(l_1 + l_2 + \ldots + l_n)$ என்பதாம்

(ii) இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மை என பின்வரும் தேற்றத்தின் மூலம் நிறுவலாம்.

7.3-2 தேற்றம் 2. இரண்டு சார்பிலா மிகை மாறிகளின் கூட்டுத் தொகை $(l + m)$-ஐ துணையலகாக உடைய ஒரு காமா மாறி என்றும், அவற்றுள் ஒரு மாறி l-ஐ துணை அலகாக உடைய காமா மாறி என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், பின் மற்றொரு மாறியும், m-ஐ துணை அலகாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறியாக இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம்

$Z = X + Y$ என்பது $(l + m)$-ஐ துணை அலகாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறி என்றும், X என்பது l-ஐ துணை அலகாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறி என்றும் கொள்வோம்.

மேலும் $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$ என்பன முறையே X, Y, Z எனும் மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்புகளாக இருக்கட்டும். ஆகையால்,

$$M_z(t) = M_x(t) \cdot M_y(t) \text{ என்று தெரியும்.}$$

i.e., $(1 - t)^{-(l+m)} = (1 - t)^{-l} \cdot M_Y(t)$

i.e., $M_Y(t) = (1 - t)^{-m}$

ஆனால் இச்சார்பு $\Gamma(m)$ எனும் மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு என்று அறிவோம். அதாவது, Y-என்பதுதான் m-ஐ துணை அலகாகக் கொண்ட காமா மாறி என்று விளங்குகிறது.

7·3·3 தேற்றம் 3. X என்பது μ, σ என்பனவற்றை முறையே கூட்டுச் சராசரியாகவும், திட்டவிலக்கமாகவும் உடைய ஒரு இயல்நிலை மாறி என்றால், $\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}$ என்பது, $\frac{1}{2}$-ஐ துணையலகாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறியாகும்.

நிரூபணம்

X ஒரு இயல்நிலை மாறியெனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், X-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு $\left(x - \frac{1}{2}dx,\ x + \frac{1}{2}dx\right)$ என்ற நுண்ணிய இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \cdot dx \quad \text{என்று}$$

தெரியும்.

$$\text{இங்கு } z = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \text{ என்க.}$$

எனவே x என்ற மாறி $(-\infty)$-யிலிருந்து $(+\infty)$ வரை உள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் ஏற்கும்போது, z-ன் மதிப்பு $(+\infty)$-யிலிருந்து 0-வரையிலும்; பின் 0-யிலிருந்து $(+\infty)$ வரையிலும் மாறும் என்று விளங்குகிறது. மேலும், x-ன் மதிப்பு (μ, ∞) என்ற இடைவெளியில் அமையுமானால், $x - \mu = \sigma\sqrt{2z}$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad dx = \frac{\sigma}{2\sqrt{2z}} \cdot 2\,dz \text{ என்றாகும்.}$$

$$\text{இவ்வாறு,} \quad dP = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{}}\, dz \text{ என்று மாறும்.}$$

$$i.e.,\ dP = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-z} \cdot z^{\frac{1}{2}-1} \cdot dz.$$

ஆனால் x-ன் மதிப்பு $(-\infty, \mu)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும்போதும், z-ன் மதிப்பு $\left(z - \frac{1}{2}dz,\ z + \frac{1}{2}dz\right)$ என்ற z இடைவெளியில் இருக்கக்கூடும். இந்த இடைவெளியில்

அமைவதற்கான நிகழ்தகவும் dP-க்குச் சமம். ஆகையால், z-ன் மதிப்பு dz என்ற நுண்ணிய இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு dP-ஐப் போன்று இரண்டு மடங்காகும். இவ்வாறு, z என்ற மாறிக்கான நிகழ்தகவு வகையீடு,

$$dP' = 2\,dt$$

$$= 2\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-z} \cdot z^{\frac{1}{2}-1}\,dz$$ என்று

கிடைக்கும்.

$$i.e,\ dP' = \frac{e^{-z} \cdot z^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,dz \left[\because\ \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$$

எனவே z என்பது $\frac{1}{2}$-ஐ துணையலகாகக் கொண்டுள்ள காமா மாறி என்று அறிகிறோம்,

குறிப்பு : இத்தேற்றத்தை பல சார்பிலா மாறிகளுக்கும் விரித்துக் கூறி, முதல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் நிரூபிக்க முடியும் இவ்வாறு

" $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பன முறையே $m_1, m_2 \ldots m_n$-ஐ கூட்டுச் சராசரிகளாகவும், $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$-ஐ திட்டவிலக்கங்களாகவும் உடைய n சார்பிலா மாறிகளாயின், பின்

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right]$$ என்ற மாறி $\frac{n}{2}$ ஐ துணை அலகாகக்

கொண்டுள்ள ஒரு காமா மாறியாகும். "

7.4 பீட்டா பரவல் (Beta Distribution)

இப்பரவல் இரண்டு வகைப்படும். அவற்றை முதல் வகை பீட்டா பரவல், இரண்டாம் வகை பீட்டா பரவல் என்று கூறுவர். முதலில், முதல் வகை பீட்டா பரவலைப் பற்றி இங்கு கவனிப்போம்.

7.4-1 முதல் வகை பீட்டா பரவல் : (Beta Ditribution of the first Kind)

(அ) வரையறை : X எனும் சரிசம வாய்ப்பு தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு,

$$f(x) = \frac{1}{\beta(l, m)} \cdot x^{l-1} \cdot (1 - x)^{m-1};\ 0 \leq x \leq 1,\ l, m > 0$$

என்று இருக்குமானால், பின் X-ன் பரவலை முதல் வகை பீட்டா பரவல் என்கிறோம். இங்கு l, m என்பன இப்பரவலின் துணை அலகுகள் எனப்படும். பீட்டா மாறி X-ஐ $\beta, (l, m)$-மாறி என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு.

(ஆ) இப்பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பு $F(x)$-ன் மதிப்பு பின்வருமாறு :

(i) $x < 0$ எனில், $F(x) = 0$ என்றும்

(ii) $0 \leq x \leq 1$ எனில், $F(x) = \frac{1}{\beta(l, m)}$

$$\int_0^x x^{l-1} \cdot (1 - x)^{m-1} \cdot dx$$ என்றும்

(iii) $x > 1$ எனில், $F(x) = 1$ என்றும் வரையறுக்கப் படும்.

(இ) நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x)$ என்றும்

$$f(x) = \frac{x^{l-1} \cdot (1 - x)^{m-1}}{\beta(l, m)}$$ என்றும் இருக்கும்.

இதன் பண்புகளாவன :

(i) $l > 1$, $m > 1$ என்றால், $x = \frac{l - 1}{l + m - 2}$ என்பது பரவலின் முகடாகும்.

(ii) $l > 2$, என்றால், X-அச்சு வளைவரையை ஆதியில் தொடும்.

(iii) $1 < l < 2$ என்றால், Y-அச்சு அதை ஆதியில் தொடும்.

(iv) $0 < l < 1$ என்றால், Y-அச்சு வளைவரையின் தொலைத் தொடு கோடாகும். இதேபோன்று, m-ன் பல்வேறு மதிப்பு

களுக்கு ஏற்ப, இவ்வளைவரை $x = 1$ என்ற புள்ளிக்கு அருகிலும் இத்தகைய பண்புகளை உடையதாய் இருக்கும்.

(ஈ) **பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்**

(*i*) கூட்டுச் சராசரி, $\mu = E(X)$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{x^{l-1} \cdot (1-x)^{m-1}}{\beta(l, m)} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\beta(l. m)} \int_0^1 x^l \cdot (1-x)^{m-1} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\beta(l, m)} \beta(l+1, m)$$

$$= \left(\frac{l}{l+m}\right)$$

(*ii*) 111^{rly} $E \ [X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{x^{l-1} \cdot (1-x)^{m-1}}{\beta(l, m)} \cdot dx$

$$= \frac{1}{\beta(l, m)} \int_0^1 x^{l+1} \cdot (1-x)^{m-1} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\beta(l, m)} \beta(l+2, m)$$

$$= \frac{l(l+1)}{(l+m)(l+m+1)}$$

$\therefore$ மாறுபாடு, $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{l(l+1)}{(l+m)(l+m+1)} - \frac{l^2}{(l+m)^2}$$

$$= \frac{lm}{(l+m)^2 \cdot (l+m+1)}$$

(*iii*) பொதுவாக, ஆதியை மையமாகக் கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, $\mu_r' = E[X^r] = \frac{\beta(l+r, m)}{\beta(l, m)}$

$$= \frac{l(l+1)\ldots\ldots(l+r-1)}{(l+m)(l+m+1)\ldots(l+m+r-1)}$$

என்றும் நிறுவலாம்.

7.4-1-*a* தேற்றம் 1. X, Y என்பன இரண்டு சார்பிலா $\gamma(l)$, $\gamma(m)$ மாறிகளாக இருந்தால், $\left(\frac{X}{X+Y}\right)$ என்பது ஒரு β, (l, m) மாறியாக இருக்கும்.

நிரூபணம்

$$Z = \frac{X}{X+Y} \text{ என்க.} \quad \therefore \quad X = \frac{YZ}{1-Z} \text{ என்றுகும்.}$$

X, Y காமாமாறிகளாக இருப்பதால் அவை மிகை மதிப்புகளைத் தான் அடைய முடியும். ஆகையால் Z-ன் வீச்சு $(0, 1)$ என்றிருக்க வேண்டும். மேலும்,

$x = \frac{yz}{1-z}$ என்பதால், $\left(y - \frac{1}{2}dy, y + \frac{1}{2}dy\right)$ என்ற வீச்சில் உள்ள Y-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு ஒப்ப,

$dx = \frac{y}{(1-z)^2}dz$ என்றிருக்கும்,

Y-ன் இந்த குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு ஒப்ப, X-ன் மதிப்பு $\left(x - \frac{1}{2}dx, x + \frac{1}{2}dx\right)$ என்ற மிகச் சிறிய வீச்சில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$\left[\frac{e^{-x} \cdot x^{l-1}}{\Gamma(l)}dx\right]$-க்குச் சமமாகும்.

ஆகையால் Z-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு, Y-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு ஒப்ப, $\left(z - \frac{1}{2}dz, z + \frac{1}{2}dz\right)$ என்ற வீச்சில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP_1 = \frac{1}{\Gamma(l)} \cdot e^{\frac{-yz}{(1-z)}} \cdot \left(\frac{yz}{1-z}\right)^{l-1} \cdot \frac{y}{(1-z)^2} \cdot dz$$

என்றாகும்.

ஆனால் Y-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு $\left(y - \frac{1}{2}dy, y + \frac{1}{2}dy\right)$-ல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP_2 = \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot e^{-y} \cdot y^{m-1} \cdot dy \text{ என்பதாகும்.}$$

எனவே Z-ம், Y-ம் முறையே dz, dy என்ற வீச்சுகளில் உள்ள மதிப்புகளை ஒரே சமயத்தில் ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு $= dP_1 \cdot dP_2$ என்று கிடைக்கும். இதிலிருந்து, Y-ன் எந்த மதிப்பிற்கும், dz-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை, Z ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு பின்வருமாறு.

$$\text{அதாவது, } dP = \int_{y=0}^{\infty} dP_1 \cdot dP_2$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(l)} e^{\frac{-yz}{(1-z)}} \cdot \left(\frac{zy}{1-z}\right)^{l-1} \cdot \frac{ydz}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot e^{-y} \cdot y^{m-1} y \cdot d$$

$$= \frac{z^{l-1} \cdot dz}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,(1-z)^{l+1}} \int_0^{\infty} y^{l+m-1} \cdot e^{-\left(\frac{y}{1-z}\right)} \cdot dy$$

வலதுபுறத்தொகையில், $y = (1-z)\,t$ என்றிட, $0 \leq z \leq 1$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad dP = \frac{z^{l-1} \cdot dz}{\Gamma(l)\,\Gamma(m) \cdot (1-z)^{l+1}}$$

$$\int_0^{\infty} (1-z)^{l+m-1} \cdot t^{l+m-1} \cdot e^{-t} \cdot (1-z)\, dt$$

$$= \frac{z^{l-1} \cdot (1-z)^{m-1}}{\Gamma(l) \cdot \Gamma(m)} \cdot dz \left[\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{l+m-1} \cdot dt \right]$$

$$= \frac{z^{l-1} \cdot (1-z)^{m-1}}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)} \cdot dz. \quad [\,\Gamma(l+m)\,]$$

$$= \frac{z^{l-1}\,(1-z)^{m-1}}{\beta(l, m)}\, dz \left[\because \quad \beta(l, m) = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \right]$$

$\therefore$ Z-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$f(z) = \dfrac{z^{l-1}\,(1-z)^{m-1}}{\beta(l, m)}$; $0 \leq z \leq 1$ என்று கிடைத்துள்ளது எனவே Z என்பது ஒரு $\beta_1\,(l, m)$-மாறி என்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு : Z என்பது ஒரு β_1 (l, m) மாறி எனில் $U = (1 - Z)$-ம் ஒரு $\beta_1\,(l, m)$-மாறியாக இருக்கும். ஏனெனில் $|\,du\,| = |\,dz\,|$; U-ன் வீச்சும் $(0, 1)$ என்றிருக்கும்.

7.41-*b*. தேற்றம் 2 : ஒரு $\beta_1\,(l, m)$-மாறி, ஒரு $\gamma\,(l + m)$-மாறி, இவற்றின் பெருக்குத்தொகை ஒரு $\gamma\,(l)$-மாறியாக இருக்கும்.

நிரூபணம்

சார்பிலா $\gamma\,(l + m)$-மாறியை X என்றும், $\beta_1\,(l, m)$-மாறியை Y என்றும் குறிப்பிடுவோம். மேலும் $Z = XY$ என்க.

Y-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு, $dP_1 = \dfrac{y^{l-1} \cdot (1-y)^{m-1}}{\beta(l, m)}\, dy$

ஆகையால் $\left(x - \frac{1}{2}\,dx,\; x + \frac{1}{2}\,dx\right)$ என்ற வீச்சிலுள்ள X-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு இணங்க, Z-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

$\left(z - \frac{1}{2}dz, z + \frac{1}{2}dz\right)$ என்ற வீச்சில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP_1 = \frac{1}{\beta(l, m)}\left(\frac{z}{x}\right)^{l-1} \cdot \left(1 - \frac{z}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{dz}{x}$$ என்று

கிடைக்கும்.

ஆனால் X-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்பு dx எனும் வீச்சில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

$$dP_2 = \frac{1}{\Gamma(l+m)} e^{-x} \cdot x^{l+m-1} \cdot dx$$ என்று தெரியும்.

ஆகையால் X-ன் எந்த மதிப்பிற்கும் இணங்க, Z-ன் மதிப்பு dz என்ற வீச்சில், அதேசமயத்தில், இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$dP = \int_{x=z}^{\infty} dP_1 \cdot dP_2 \quad (\because \quad z \leq x)$$

$$= \int_{x=z}^{\infty} \frac{1}{\beta(l, m)}\left(\frac{z}{x}\right)^{l-1} \cdot \left(1 - \frac{z}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{dz}{x}$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma(l+m)} \cdot e^{-x} \cdot x^{l+m-1} \cdot dx$$

$$= \frac{z^{l-1} \cdot dz}{\beta(l, m) \cdot \Gamma(l+m)} \int_{z}^{\infty} e^{-x}(x-z)^{m-1} \cdot dx$$

$$= \frac{z^{l-1} \cdot dz}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)} \int_{0}^{\infty} e^{-z(t+1)} \cdot (tz)^{m-1} \cdot (z\,dt);$$

($tz = x - z$ என்றிட)

$$= \frac{z^{l-1} \cdot e^{-z}}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}\,dz \int_{0}^{\infty} e^{-zt}(zt)^{m-1} \cdot d(zt)$$

$$= \frac{z^{l-1} \cdot e^{-z}}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}\, dz \cdot \Gamma(m)$$

$$i.e., \quad dP = \frac{z^{l-1} \cdot e^{-z}}{\Gamma(l)} \cdot dz$$

எனவே Z என்பது ஒரு $\Upsilon(l)$ மாறி என்று நிறுவியுள்ளோம்.

7.4-2 இரண்டாம் வகை பீட்டா பரவல் (Beta Distribution of the Second Kind)

(அ) **வரையறை :** X எனும் தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு. $f(x) = \frac{1}{(l,m)} \cdot \frac{\lambda^{l-1}}{(1+x)^{l+m}}, x \geq 0$ $l, m > 0$ என்றிருந்தால், X-ன் பரவலை ஒரு 2-ம் வகை பீட்டா பரவல் என்கிறோம். இங்கு X-ஐ ஒரு $\beta_2(l, m)$ மாறி என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

(ஆ) இப்பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பு $F(x)$-ன் மதிப்பு,

$$f(x) = \frac{1}{B(l, m)} \int_0^x \frac{\lambda^{l-1}}{(l+\lambda)^{l+m}}\, dx$$ என்று அறியலாம்.

குறிப்பு: முதல்வகை பீட்டா பரவலுக்கும், இரண்டாம் வகை பீட்டா பரவலுக்கும் இடையே ஒரு முக்கிய வேறுபாடு உண்டு.

அதாவது, $\beta_.(l, m)$-மாறியின் மதிப்புகள் $(0, 1)$ என்ற வீச்சிற்குள் அமைந்திருக்கும்; ஆனால் $\beta_2(l, m)$-மாறியின் மதிப்புகள் $(0, \infty)$ என்ற முடிவிலா வீச்சினுள் இருக்கும்.

(ii) X என்ற மாறி ஒரு $\beta_2(l, m)$-மாறி என்றால், $Y = \frac{1}{X}$ என்பது ஒரு $\beta_2(m, l)$ மாறியாக இருக்கும்.

ஏனெனில்' X-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$$dP = \frac{1}{B(l, m)} \frac{\lambda^{l-1}}{(1+x)^{l+m}} \cdot dx\,, \; x \geq 0$$

இதில் $x = \frac{1}{y}$ என்றிட, $|dx| = \frac{1}{y^2}\,|dy|$ என்றாகும்.

ஆகையால், y-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு

$$dP' = \frac{1}{B(l,m)} \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{l-1}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{l+m}} \cdot \frac{1}{y^2} dy$$

$$= \frac{1}{B(l,m)} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{l+m}} dy$$

$$= \frac{1}{B(ml)} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{l+m}} dy \qquad [\because \quad B(l,m) = B(m,l)]$$

எனவே, Y என்பது ஒரு $\beta_2(m,l)$-மாறி எனத் தெரிகிறது.

(இ) நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு,

$$y = \frac{1}{B(l,m)} \cdot \frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l+m}}$$ என்பதாம்.

இதன் பண்புகளாவன :

(*i*) $l > 1$ எனில், $x = \frac{l-1}{m+1}$ என்பது பரவலின் முகடாகும் மேலும் இவ்வளைவரைக்கு X அச்சு ஒரு தொலைத்தொடு கோடாகும்.

(*ii*) $l > 2$ எனில், X-அச்சு வளைவரையை ஆதியில் தொடும்.

(*iii*) $1 < l < 2$ எனில், Y-அச்சு வளைவரையை ஆதியில் தொடும்.

(*iv*) $0 < l < 1$ எனில், இரண்டு அச்சுகளும் வளைவரைக்கு அணுகு கோடுகளாகும்.

(ஈ) விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள்

(*i*) $m > 1$ எனில், கூட்டுச்சராசரி, $\mu = E(X)$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{B(l,m)} \cdot \frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l+m}} \cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{B(l,m)} \int_0^\infty \frac{x^l}{(l+x)^{l+m}}\, dx$$

$$= \frac{1}{B(l,m)} B(l+1, m-1) = \frac{l}{m-1}$$

(ii) $m > 2$ எனில், $\mu'_2 = E(X^2)$

$$= \frac{1}{B(l,m)} \int_0^\infty \frac{x^{l+1}}{(l+x)^{l+m}}\, dx$$

$$= \frac{1}{B(l,m)} [B(l+2, m-2)]$$

$$= \frac{l(l+1)}{(m-1)(m-2)}$$

(iii) $\therefore$ மாறுபாடு, $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{l(l+1)}{(m-1)(m-2)} - \frac{l^2}{(m-1)^2}$$

$$= \frac{l(l+m-1)}{(m-1)^2 (m-2)}$$

(iv) பொதுவாக, $m > r$ எனில், ஆதியை மையமாகக் கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை,

$$\mu'_r = E(X^r) = \frac{1}{B(l,m)} \int_0^\infty \frac{x^{l+r-1}}{(1+x)^{l+m}}\, dx$$

$$= \frac{1}{B(l,m)} B(l+r, m-r)$$

$$= \frac{l(l+1) \ldots\ldots (l+r-1)}{(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-r)}$$

7.4-2-*a* தேற்றம் 1. முதல் வகை பீட்டா மாறி ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒப்ப, இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறிகள் இரண்டு உள்ளன.

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

நிரூபணம்

X-ஐ ஒரு $\beta_1 (l, m)$-மாறி என்க. எனவே X-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு, $dP = \dfrac{x^{l-1} \cdot (1-x)^{m-1}}{B(l, m)} dx; \quad 0 \leq x \leq 1.$

Y என்ற மாறியை, $X = \dfrac{1}{1+Y}$ என்றிருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.

அதாவது, $Y = \dfrac{1-X}{X}$;

ஆகையால் Y-ன் வீச்சு $(0, \infty)$ என்று கிடைக்கும்.

மேலும், $| dx | = \dfrac{1}{(1+y)^2} | dy |$ என்றுகும்.

எனவே Y-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு.

$dP = \dfrac{y^{m-1} \cdot dy}{B(l, m)(1+y)^{l+m}}$ என்று கிடைக்கப்பெறும்,

அதாவது Y என்பது ஒரு $\beta_2 (m, l)$ மாறி என்று தெரிகிறது.

மேலும் $\dfrac{1}{Y}$-ம் ஒரு $\beta_2 (l, m)$ மாறி என்றும் அறியலாம்

இதேபோன்று இத்தேற்றத்தின் மறுதலையையும் நிரூபிக்கலாம்.

7.4-2-*b* தேற்றம் 2. l, m என்பனவற்றை துணை அலகுகளாக உடைய இரண்டு சார்பிலா காமா மாறிகளின் விகிதம் ஒரு $\beta_2 (l, m)$-மாறியாக இருக்கட்டும்.

நிரூபணம்

X, Y என்பன முறையே $\gamma(l), \gamma(m)$ மாறிகளாக இருக்கட்டும்.

இங்கு $U = X + Y$; $V = \frac{X}{Y}$ எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது, $X = \frac{UV}{1 + V}$; $Y = \frac{U}{1 + V}$ என்று கிடைக்கும்.

ஆகையால், $$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{v}{1 + v} & \frac{1}{1 + v} \\ \frac{u}{(1+v)^2} & \frac{-u}{(1 + v)^2} \end{vmatrix} = \frac{-u}{(1 + v)^2}$$

$$i.e., \quad \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| = \frac{u}{(1 + v)^2}$$

இப்பொழுது, X-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு $\left(x - \frac{1}{2}dx, x + \frac{1}{2} dx\right)$ என்ற நுண்ணிய இடைவெளியில் அமைந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP_1 = \frac{e^{-x} \cdot x^{-1} \cdot dx}{\Gamma (l)}$$ என்று தெரியும்.

இதேபோன்று, Y-ன் மதிப்பு $\left(y - \frac{1}{2} dy, y + \frac{1}{2} dy\right)$ என்ற இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dP_2 = \frac{e^{-y} \cdot y^{m-1} \cdot dy}{F (m)}$$ என்றும் தெரியும்.

எனவே X; Y-ன் மதிப்புகள் முறையே dx, dy என்ற இடைவெளிகளுக்குள் ஒரே சமயத்தில் அமைந்திருப்பதற்கான கூட்டு நிகழ்தகவு

$$dP = dP_1 \cdot dP_2$$ என்றாகும்

$$i.e., \ dP = \frac{x^{l-1} \cdot e^{-x} \cdot dx}{\Gamma (l)} \cdot \frac{y^{m-1} \cdot e^{-y} \cdot dy}{\Gamma (m)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)} \cdot e^{-(x+y)} \cdot x^{l-1} \cdot y^{m-1}\, dx\, dy$$

$$i.e., \; dP = \frac{1}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)} e^{-(x+y)} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{l-1} \cdot y^{l+m-2} \cdot dx \cdot dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)} \cdot e^{-u} \cdot v^{l-1} \cdot \left(\frac{u}{1+v}\right)^{l+m-2} \cdot \left[\frac{u}{(1+v)^2}\, du\, dv\right]$$

$$= \frac{e^{-u} \cdot v^{l-1} \cdot u^{l+m-1}}{\Gamma(l)\,\Gamma(m) \cdot (1+v)^{l+m}}\, du\, dv$$

$$i.e., \; dP = \frac{e^{-u} \cdot u^{l+m-1}}{\Gamma(l+m)}\, du \cdot \frac{v^{l-1}}{B(l, m)\,(1+v)^{l+m}}\, dv$$

dP-ன் இம்மதிப்பு, U, V என்ற மாறிகள் du, dv என்ற இடைவெளிகளில் உள்ள மதிப்புகளை ஒரே சமயத்தில் ஏற்பதற்கான கூட்டு நிகழ்தகவைக் குறிக்கும் என்று அறியக் கூடும்.

மேலும் U-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$\frac{e^{-u} \cdot u^{l+m-1} \cdot du}{\Gamma(l+m)}$ என்றிருப்பதால், அது ஒரு $\Gamma(l+m)$-மாறி என்றும்: V-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$\frac{v^{l-1} \cdot dv}{B(l, m)\,(1+v)^{l+m}}$ என்றிருப்பதால், அது ஒரு $\beta_2(l, m)$-மாறி என்றும் அறிகிறோம்.

இதிலிருந்து நமக்கு இரண்டு முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

(i) $U = X + Y$ என்பது ஒரு $\Gamma(l+m)$-மாறியாக உள்ளது. அதாவது இரண்டு சார்பிலா காமா மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையும் ஒரு காமா மாறியாக இருக்கும்.

(*ii*) $V = \frac{X}{Y}$ என்பது ஒரு $\beta_2\,(l, m)$-மாறியாக உள்ளது. அதாவது இரண்டு சார்பிலா காமா மாறிகளின் விகிதம், ஒரு இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாக இருக்கும்.

குறிப்பு : இம்முறையைப் பின் பற்றி காமா பரவலில் உள்ள சில தேற்றங்களையும் நிறுவ முடியும்.

7·5 கை-வர்க்கப் பரவல் (Chi-Square Distribution)

(அ) வரையறை X எனும் சரிசம வாய்ப்பு தொடர் மாறியின் எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும், அம்மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{\frac{-x}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1}$$ என்றிருக்குமானால்,

X-ன் பரவலை கை-வர்க்கப் பரவல் என்று கூறுகிறோம்.

பொதுவாக, கை-வர்க்கப் பரவலில் X-க்குப் பதிலாக χ^2 என்றிடுதல் வழக்கமாக உள்ளது. இப்பரவலையும் χ^2-பரவல் என்று குறிப்பிடுவர்.

இவ்வாறு, χ^2-பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}$$ என்றாகும்.

மேலும் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$$dP = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

$d(\chi^2)$, $0 \leq \chi^2 < \infty$ என்றும் கிடைக்கப்பெறும்.

இங்கு காணப்படும் துணை அலகு n-ஐ, χ^2-பரவலின் "கட்டின்மை எண்ணிக்கை" என்பர்.

(ஆ) குவிவுப் பரவல் சார்பு $F(X)$ என்பது இப்பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பு எனில்,

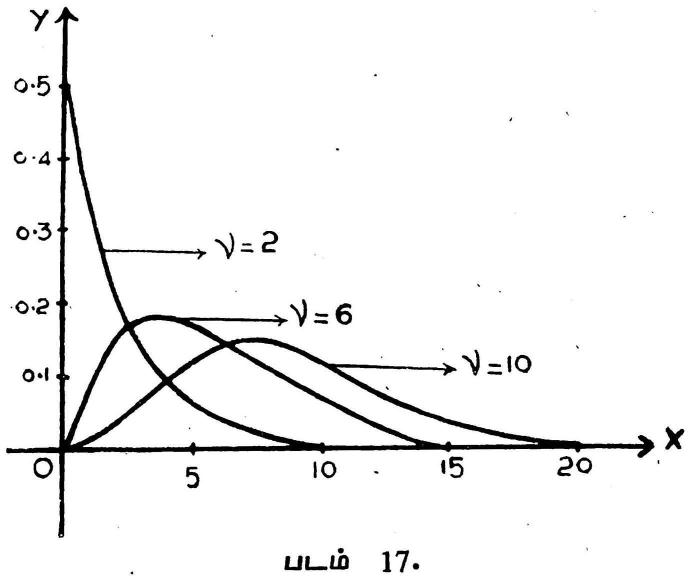
(i) $\chi^2 > 0$ எனும்போது,

$$F(X) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^X e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\, d(\chi^2)$$

(ii) $\chi^2 \leq 0$ எனும்போது, $F(X) = 0$ என்று வரையறுக்கப்படும்.

(இ) χ^2-பரவலின் நிகழ்தகவு வளைவரை: இவ்வளைவரையின் சமன்பாடு,

$$y = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}$$ என்பதாகும்.



படம் 17.

இங்கு $\nu = (n-1)$ என்றிட, $\nu = 1, 2, 4, 6, 10$ எனும்போது, வளைவரையின் அமைப்பு மேலே உள்ள படத்தில் காட்டப் பட்டுள்ளது.

இப்படத்திலிருந்து γ-ன் மதிப்பு 2-ஐவிட அதிகமாக இருக்கும் போது, χ^2-வளைவரையின் அமைப்பு, இயல்நிலை வளைவரையைப் போன்று சீரானதாக மாறும் என்று தெரிகிறது. $\gamma = 3$ எனில் வளைவரை Y-அச்சை ஆதியில் தொட்டுக் கொண்டு செல்லும் என்றும், ஆனால் $\gamma = 4$ எனில் இரண்டு அச்சுக்களையுமே, அது ஆதியில் தொடாது என்றும் கண்டு கொள்ளலாம். $\gamma \geq 2$ எனும்போது $\chi^2 = \gamma - 2$ என்பது Y-ன் மீப்பெரிய மதிப்பைக் கொடுக்கும் என்றும் அறியலாம்.

அடுத்து, χ^2-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு χ_0^2 என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைவிட அதிகமாக இருக்க வேண்டுமாயின் அதற்குரிய நிகழ்தகவு,

$$P = \int_{\chi_0^2}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\, d(\chi^2) \text{ என்று}$$

தெரியும்.

இத்தொகையைப் பயன்படுத்தி P-ன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு ஒப்ப, n-ன் மதிப்பு 1-லிருந்து 30 வரை அமையும்போது χ_0^2-ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு அட்டவணைப் படுத்தியுள்ளனர். அட்டவணை புத்தகத்தின் இறுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேலும் n-ன் மதிப்பு 30-ஐ விட அதிகமாக இருக்கும்போது $[\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}]$ என்ற மாறி ஏறக்குறைய ஒரு இயல்நிலை மாறியாக மாறும் என்ற முடிவைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் χ_0^2-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட இயலும்.

இங்கு $P = \frac{r}{100}$ என்றிருக்குமானால், பின் χ_0^2-ஐ, கட்டின்மை எண்ணிக்கை n என்றுள்ள கை-வர்க்கப் பரவலின் r சதவீத மதிப்பு என்று கூறுகிறோம்.

χ^2-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு ஒப்ப கிடைக்கும் y-ன் மதிப்பு χ^2-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பாகும். அட்டவணையிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் P-ன் மதிப்பு 0·95-ஐ விட அதிகமாக இருக்குமானால், χ^2-க்கு χ_0^2-ஐ விட சிறிய மதிப்பு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 5 சதவீதத்தை விட குறைவாக இருக்கும் என்று

பொருளாகும். இதேபோன்று P-யானது 0·99-ஐ விட அதிகமாக இருந்தால், χ^2 க்கு χ_0^2-ஐ விட சிறிய மதிப்பு கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு ஒரு சதவீதத்தைவிட குறைவாக இருக்க வேண்டும் என்று அறியலாம்.

இம்முடிவுகள் கூறுகளின் அளவு காணுதலில் மிகவும் பயன் படுகின்றன.

குறிப்பு : $X = \chi^2$ என்பது ஒரு கை-வர்க்க மாறி எனில், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்பை மாற்றியமைக்க,

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \text{ என்றாகும்.}$$

இது ஒரு காமா பரவலைக் குறிக்கும் என்று தெரியும். இவ்வாறு X என்ற மாறிக்கு $\left(\frac{n}{2}\right)$-ஐ துணை அலகாக உடைய ஒரு கை-வர்க்கப் பரவல் இருக்குமானால், $\left(\frac{X}{2}\right)$ எனும் மாறிக்கு $\left(\frac{n}{2}\right)$-ஐ துணை அலகாக உடைய ஒரு காமா பரவல் உண்டு என அறியலாம். இப்பரவல் புள்ளியியலில் மிகவும் பயன்படக்கூடிய ஒன்றாகும்.

(ஈ) விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

(*i*) கூட்டுச் சராசரி, $\mu = E(\chi^2)$

$$= \int_0^\infty \frac{\chi^2}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot d(\chi^2)$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \, 2^{\frac{n}{2}-1} \, 2 \, dx$$

($\chi^2 = 2x$ என்றிட)

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\frac{n}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = 2\frac{n}{2} = n$$

(ii) ஆதியை மையமாகக் கொண்ட 2-ம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை,

$$\mu'_2 = E[(\chi^2)^2]$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\chi^2)^2}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} d(\chi^2)$$

$$= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\frac{n}{2}+1} dx$$

$$= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{n}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)$$

$$= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n(n+2)$$

(iii) $\therefore$ $\text{Var}(\chi^2) = E(\chi^2)^2] - E(\chi^2)$

$$= n(n+2) - n^2$$

$$= 2n$$

i.e., திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{2n}$

(iv) $M(t)$ என்பது கை-வர்க்கப் பரவலின், ஆதியை மையமாகக்கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு எனில், பின்

$$M(t) = E\left[e^{t\chi^2}\right]$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{t\chi^2}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, d(\chi^2)$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{(2t-1)\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\, d(\chi^2)$$

வலது புறத்தொகையைக்காண, $u = (1-2t)\frac{\chi^2}{2}$ என்றிடுவோம்.

$$\therefore\ du = (1-2t)\, d(\chi^2)\,;$$

$1-2t > 0$ என்க

எனவே $$M(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{2u}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}-1} 2\,du$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-u}\, u^{\frac{n}{2}-1}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(1-2t)^{\frac{n}{2}}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

அதாவது $$M(t) = 1 + \frac{n}{2}(2t) + \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2!}(2t)^2 + \cdots\cdots$$

$$+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdots\cdots+\left(\frac{n}{2}+r-1\right)}{\angle r}(2t)^r+\cdots\cdots\to\infty$$

∴ r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $= \mu'_r = M(t)$-ன் விரிவிலுள்ள $\left(\frac{t^r}{\angle r}\right)$-ன் குணகம்

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdots\cdots\left(\frac{n}{2}+r-1\right)x^r$$

$$= 2\,(n+2)\cdots\cdots(n+2r-2)$$

(v) கை-வர்க்கப் பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பு,

$$K(t) = \log[M(t)]$$

$$i.e., K(t) = \left(-\frac{n}{2}\right)\log(1-2t)$$

$$= \frac{n}{2}\left[2t+\frac{1}{2}(2t)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{r}(2t)^r+\cdots\cdots\to\infty\right]$$

∴ பரவலின் r-ஆவது குவிவு $= K(t)$-ன் விரிவிலுள்ள $\left(\frac{t^r}{\angle r}\right)$-ன் குணகம்

$$= n\cdot 2^{r-1}\,\underline{|r-1}$$

7.5-1 தேற்றம் 1 : $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots\cdots x_n$ என்பன n சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகள் என்றும், அவை ஒவ்வொன்றின் கூட்டுச் சராசரியும் பூஜ்யமாகவும், மாறுபாடு ஒன்று எனவும் இருந்தால், பின் $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots\cdots + x_n^2$ என்பது ஒரு கை-வர்க்கமாறியாகும்.

நிரூபணம் :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இங்கு x_i என்பது ஒரு இயல்நிலை மாறியாக இருப்பதால் இதனுடைய ஏதேனும் ஒருமதிப்பு dx_i என்ற நுண்ணிய இடைவெளியில் அமை வதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பு

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} x_i^2} \cdot dx_i$$ என்று தெரியும்.

இது $i = 1, 2, \ldots\ldots \ldots n$ என்ற எல்லா n மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

மேலும் $x_i \; (i = 1, 2, \ldots\ldots \ldots n)$ என்பன சார்பிலா மாறிகளாயிருப்பதால், அவற்றின் மதிப்புகள் முறையே dx_1, $dx_2, dx_3 \ldots \ldots dx_n$ என்ற இடைவெளிகளில் ஒருங்கே அமை வதற்கான கூட்டு நிகழ்தகவின் மதிப்பு dP எனில்,

$$aP = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{1}{2} x_1^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} x_2^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} x_3^2}$$

$$\ldots \ldots e^{-\frac{1}{2} x_n^2} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \ldots\ldots dx_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2)} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \ldots\ldots \ldots dx_n$$

$$i.e., \quad dP = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \cdot dx_1 \, dx_2 \ldots\ldots dx_n$$

இப்பொழுது χ^2 என்ற மாறியை, n-பரிமாண அதிபர வெளியில் உள்ள E எனும் புள்ளி குறிப்பதாகக் கொள்வோம். பின் E-ன் ஆயக்கூறுகள் $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n)$ என்றாகும். ஆகையால் dP என்பது $(dx_1 \cdot dx_2 \ldots\ldots\ldots dx_n)$ என்று கன அளவுடைய மூலகத்தில் E எனும் புள்ளி அமைவதற்கான நிகழ்தகவாகும். இனி χ-ன் மதிப்பு $(\chi, \chi + d\chi)$ என்ற நுண்ணிய இடைவெளியில் அமையும்போது, $(dx_1 \cdot dx_2 \ldots\ldots dx_n)$ எனும் கன அளவு மூலகம் எவ்வாறுமாறும் என்பதைப் பார்ப்போம்.

χ-ன் மதிப்பு ஒரு மாருத எண் ாளில்,

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \chi^2$ என்ற சமன்பாடு ஆதியை மையமாகவும், χ-ஐ ஆரமாகவும் உடை ஒரு அதிபர கோளத்தைக் குறிக்கும். மேலும் $\chi = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$-ன் மதிப்பு $(\chi, \chi + d\chi)$ என்ற இடைவெளியில் இருப்பின், E எனும் புள்ளியானது ஆதியை பொதுமையமாகவும் $\chi, \chi + d\chi$ என்பனவற்றை ஆரங்களாகவும் கொண்டுள்ள இரண்டு அதிபர கோளங்களுக்கிடையே உள்ள பகுதியில் இருக்கவேண்டும். அவ்விரு கோளங்களுக்கும் இடையே உள்ள கன அளவு $d(\chi^n)$-க்கு விகிதசமம் உடையதாக இருக்கும்; அதாவது, $(\chi^{n-1} \cdot d\chi)$-க்கு விகிதசமமானதாக இருக்கும்.

இவ்வாறு, χ-ன் மதிப்பு $d\chi$ எனும் நுண்ணிய இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $\left(e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \cdot \chi^{n-1}\, d\chi\right)$க்கு விகிதசமமானதாக இருக்கவேண்டும். அதாவது,

$$dP = \lambda \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot d\left(\frac{1}{2}\chi^2\right);$$ (λ என்பது ஒரு மாறிலி) ஆனுல் χ^2-ன் மதிப்பு $(0, \infty)$ என்ற வீச்சில் அமைய வேண்டுமாதலால் இந்த வீச்சு முழுவதும் கணக்கிடப்படும் dP-ன் தொகையானது ஒன்றுக்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, $$\int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} d\left(\frac{1}{2}\chi^2\right) = 1$$

இதிலிருந்து, $\lambda = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ என்று பெறலாம்.

$$\therefore\quad dP = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot d\left(\frac{1}{2}\chi^2\right)$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot d(\chi^2); \quad 0 \leq \chi^2 < \infty$$

இவ்வாறு χ^2 என்பது ஒரு கை-வர்க்க மாறி என்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு : இத்தேற்றத்தையே கை-வர்க்கப் பரவலின் வரையறையாகவும் கொள்வர். இங்கு சார்பிலா மாறிகளின் எண்ணிக்கையாகிய n-ஐ பரவலின் "கட்டின்மை எண்ணிக்கை" என்று கூறுவர்.

இத்தேற்றத்தின் நிரூபணம் *R. A.* பிஷர் என்பவரால் கொடுக்கப்பட்டதாகும்.

துணை முடிவுகள் :

(i) $\chi_1, \chi_2, \ldots\ldots\ldots \chi_n$ என்பன n சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகள் என்றும், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots\ldots \mu_n$ என்றும், திட்டவிலக்கங்கள் முறையே $\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots \sigma_n$ என்றும் இருந்தால், பின்

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\chi_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$$

என்பது, n-ஐ கட்டின்மை எண்ணுகக் கொண்ட, ஒரு கை-வர்க்க மாறியாகும்.

(ii) μ-ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும், σ-ஐ திட்டவிலக்கமாகவும் உடைய ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் சரிசமவாய்ப்புக் கூறில், அக்கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{X}$-ம் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் அமையுமாதலால்,

$$\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

என்பதும், ஒன்றை கட்டின்மை எண்ணிக்கையாகக் கொண்ட ஒரு கை-வர்க்கப் பரவலாகும்.

7.5-2 தேற்றம் 2. n முடிவிலியை அணுகும்போது கை-வர்க்கப் பரவலின் எல்லை மதிப்பு ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

கை-வர்க்கப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி n என்றும், மாறுபாடு $2n$ என்றும் நிறுவியுள்ளோம். மேலும் χ^2-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு,

$$M(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}} \text{ என்றும் கண்டுள்ளோம்.}$$

ஆகையால், $M'(t)$ என்பது $\left(\frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}}\right)$ என்ற மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு எனில், பின்

$$M'(t) = e^{\left(\frac{-nt}{\sqrt{2n}}\right)} \cdot M\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) \text{ என்று}$$

அறியலாம்

$$i.e., \; M'(t) = e^{\frac{-nt}{\sqrt{2n}}} \cdot \left(1 - \frac{2t}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\therefore \quad \log M'(t) = \frac{-nt}{\sqrt{2n}} - \frac{n}{2} \log\left(1 - \frac{2t}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{n} \cdot t}{\sqrt{2}} - \frac{n}{2} \cdot \log\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} t\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} t + \frac{n}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} t + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} t\right)^2 + \dots\dots \to \infty\right]$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

எனவே, n முடிவிலியை அணுகும்போது, $\log M'(t)$-ன் மதிப்பு $\left(\frac{1}{2} t^2\right)$-ஐ அணுகும் என்று தெரிகிறது.

அதாவது, $n \to \infty$ என்றால், $\log M'(t) \to \frac{1}{2} t^2$ என்றாகும்.

ஆகையால், $n \to \infty$ என்றால், $M'(t) \to e^{\frac{1}{2}t^2}$ என்று அறிகிறோம்.

ஆனால், $e^{\frac{1}{2}t^2}$ எனும் சார்பு இயல்நிலைப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு எனத் தெரியும்.

அதாவது, எடுத்துக் கொண்ட மாறியின் பரவல், n முடிவிலியை அணுகும்போது, ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாகும் என்று அறிகிறோம்.

7.5-3 தேற்றம் 3. இரண்டு சார்பிலா கை-வர்க்க மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையும் ஒரு கை-வர்க்க மாறியாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

χ_1^2, χ_2^2 என்பன முறையே n_1, n_2 என்ற எண்களை கட்டின்மை எண்ணிக்கைகளாகக் கொண்ட இரண்டு கை-வர்க்க மாறிகள் எனக் கொள்வோம் பின் அவற்றின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்புகள் $M_1(t)$, $M_2(t)$ என்பன வருமாறு.

$$M_1(t) = (1-2t)^{-\frac{n_1}{2}}, \quad M_2(t) = (1-2t)^{-\frac{n_2}{2}}$$

$\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$ என்றால், பின் χ^2-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு,

$M(t) =$ χ_1^2, χ_2^2-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையாகும்.

$$i.e., \; M(t) = M_1(t) \cdot M_2(t)$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n_1}{2}} \cdot (1-2t)^{-\frac{n_2}{2}}$$

$$= (1-2t)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

ஆனால் இச்சார்பு. $(n_1 + n_2)$-ஐ கட்டின்மை எண்ணிக்கை யாக உடைய ஒருகை-வர்க்க மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு என்று விளங்கும். அதாவது $\chi^2 = (\chi_1^2 + \chi_2^2)$ என்பதும் ஒரு கை-வர்க்க மாறியாகும்.

குறிப்பு : இத்தேற்றத்தை, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பைப் பயன்படுத்தாமல் நிறுவும் முறையை அடுத்துவரும் தேற்றத்தில் காணலாம்

7.5.4 தேற்றம் 4. χ_1^2, χ_2^2 என்பன முறையே n_1, n_1-ஐ கட்டின்மை எண்ணிக்கைகளாகக் கொண்ட இரண்டு கை-வர்க்க மாறிகள் எனில்

(i) $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$ என்பது $(n_1 + n_2)$-ஐ கட்டின்மை எண்ணிக்கையாகக் கொண்ட ஒரு கை-வர்க்க மாறியாகவும்;

(ii) $T^2 = \dfrac{\chi_1^2}{\chi_2^2}$ என்பது $\dfrac{n_1}{2}$, $\dfrac{n_2}{2}$ என்ற எண்களை துணை அலகுகளாக உடைய ஒரு இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாகவும் இருக்கும்.

நிருபணம் :

χ_1^2 என்ற கை-வர்க்க மாறியின் நிகழ்தகவு வகையீடு

$$= \frac{(\chi_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi_1^2}{2}} \, d(\chi_1^2)}{2^{\frac{n_1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}$$

இதேபோன்று χ_2^2-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு

$$= \frac{(\chi_2^2)^{\frac{n_2}{2}} \cdot e^{-\frac{\chi_2^2}{2}} \cdot d(\chi_2^2)}{2^{\frac{n_2}{2}} \, \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

ஆனால் இந்நிகழ்தகவு வகையீடுகள், $d(\chi_1^2)$, $d(\chi_2^2)$ என்ற நுண்ணிய இடைவெளிகளில், முறையே χ_1^2, χ_2^2 என்ற மாறிகள் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் குறிப்பனவாகும்.

ஆகையால், இவ்விரண்டு மாறிகளும் இந்த நுண்ணிய இடைவெளிகளில் ஒருங்கே அமைவதற்கான கூட்டு நிகழ்தகவின் மதிப்பு,

$$dP = \frac{(\chi_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi_1^2}{2}} \cdot d(\chi_1^2)}{2^{\frac{n_1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \cdot \frac{(\chi_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi_2^2}{2}} \cdot d(\chi_2^2)}{2^{\frac{n_2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} (\chi_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1} \cdot (\chi_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1} \cdot e^{-\left(\frac{\chi_1^2+\chi_2^2}{2}\right)} \cdot d(\chi_1^2)\, d(\chi_2^2)$$

எனவே χ_1, χ_2 என்ற மாறிகள் முறையே $d\chi_1$, $d\chi_2$ என்ற இடைவெளிகளில் ஒருங்கே அமைவதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பு வருமாறு :

$$dP = \frac{4}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\chi_1^2+\chi_2^2)} \cdot \chi_1^{n_1-1} \cdot \chi_2^{n_2-1} \cdot d\chi_1 \cdot d\chi_2$$

இதில் $\chi_1 = \chi \sin\theta$, $\chi_2 = \chi \cos\theta$ என்று பிரதியிட,

$$\chi = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2},\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)$$ என்று

கிடைக்கப்பெறும்.

மேலும், $d\chi_1 \cdot d\chi_2 = \left|\frac{\partial(\chi_1 \cdot \chi_2)}{\partial(\chi\ \theta)}\right| d\chi \cdot d\theta = \chi \cdot d\chi\, d\theta$

என்றாகும்.

χ_1^2, χ_2^2 என்ற கை-வர்க்க மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் மதிப்பும் பூஜ்யத்திலிருந்து, முடிவிலிவரை மாறும்போது, χ^2-ன் மதிப்பும் பூஜ்யத்திலிருந்து முடிவிலிவரை மாறும் என்றும், ஆனால் θ-ன் மதிப்பு பூஜ்யத்திலிருந்து, $\frac{\pi}{2}$ வரையில் மாறும் என்றும் கண்டு கொள்ளலாம். (அதாவது θ, 0°-லிருந்து 90°-வரை மாறும்)

இவ்வாறு χ-ன் மதிப்பு $d\chi$ என்ற நுண்ணிய இடைவெளியிலும், θ-ன் மதிப்பு $d\theta$ எனும் இடைவெளியிலும் ஒருங்கே அமைவதற்கான கூட்டு நிகழ்தகவு,

$$dP' = \frac{4}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

$$\cdot (\chi \sin\theta)^{n_1 - 1} \cdot (\chi\cos\theta)^{n_2 - 1}\ (\chi\, d\chi \cdot d\theta)$$ என்று

என்று கிடைக்கும்.

$$i.e.,\quad dP' = \left[\frac{e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n_1+n_2}{2} - 1} \cdot d(\chi^2)}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}\right]$$

$$\times \left[\frac{2}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} (\sin\theta)^{n_1 - 1} \cdot (\cos\theta)^{n_2 - 1} \cdot d\theta\right]$$

இங்கு $dP_1 = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}$

$\cdot (\chi^2)^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} \cdot d(\chi^2)$ என்றும்

$$dP_2 = \frac{2}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} (\sin\theta)^{n_1-1} (\cos\theta)^{n_2-1} d\theta$$

என்றும் எடுத்துக் கொள்வோமானல்,

$dP' = dP_1 \cdot dP_2$ என்ருகும்.

இம்முடிவிலிருந்து χ^2, θ என்பன வெவ்வேறு பரவல்களை உடைய இரண்டு சார்பிலா மாறிகள் என்று தெரிகிறது.

மேலும் χ^2-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$$dP_1 = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} d(\chi^2)$$

அதாவது, χ^2 எனும் மாறி $(n_1 + n_2)$-ஐ கட்டின்மை எண்ணிக்கையாக உடைய ஒரு கை-வர்க்க மாறி என்று அறியலாம்.

இப்பொழுது θ-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$$dP_2 = \frac{2}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} (\sin\theta)^{n_1-1} \cdot (\cos\theta)^{n_2-1} \cdot d\theta$$

இங்கு $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) = \tan^{-1}(T)$ என்க.

$$\therefore \quad d\theta = \frac{dT}{1+T^2}$$

மேலும், $\sin\theta = \frac{T}{\sqrt{1+T^2}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+T^2}}$ என்று பெறலாம்.

θ-ன் மதிப்பு $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ என்ற வீச்சில் அமையும்போது, T-ன் மதிப்பு $(0, \infty)$ என்ற முடிவிலா வீச்சில் அமையும் என்று அறியலாம்.

$$\therefore \quad dP_2 = \frac{2}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{T^{n_1-1}}{(1+T^2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \cdot dT$$

என்றாகும்.

$$i.e., \quad dP_2 = \frac{1}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{(T^2)^{\frac{n_1}{2}-1}}{(1+T^2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \cdot d(T^2);$$

$$0 \leq T^2 < \infty$$

எனவே T^2 என்பது ஒரு $\beta_2\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$ என்று தெரிகிறது.

பின் வரும் தேற்றங்கள் இரண்டையும், இதே முறையில், நிறுவலாம்.

7.5-5 தேற்றம் 5. $(\chi_1^2 + \chi_2^2)$ என்பது $(n_1 + n_2)$-ஐ கட்டின்மை எண்ணிக்கையாகக் கொண்ட ஒரு கை-வர்க்க மாறியாகவும், χ_1^2 என்பதும் n_1-ஐ கட்டின்மை எண்ணிக்கையாகக் கொண்ட ஒரு கை-வர்க்க மாறியாகவும் இருப்பின், χ_2^2-ம் n_2-ஐ கட்டின்மை எண்ணிக்கையாக உடைய ஒரு கை-வர்க்க மாறியாகும். (χ_1^2, χ_2^2 சார்பிலா மாறிகள் என்க.)

7·5·6 தேற்றம் 6 χ_1^2, χ_2^2 என்பன இரண்டு சார்பிலா கை-வர்க்க மாறிகள் என்றும், அவற்றின் கட்டின்மை எண்ணிக்கைகள் முறையே n_1, n_2 என்றும் இருந்தால் $\left(\frac{\chi_1^2}{\chi_1^2 + \chi_2^2}\right)$ என்பது $\frac{n_1}{2}$, $\frac{n_2}{2}$-ஐ துணை அலகுகளாக உடைய முதல் வகை பீட்டா மாறியாகவும், $\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}$ என்பது அதே துணை அலகுகளை உடைய இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாகவும் இருக்கும்.

7·6 ஸ்டுடண்டின் t-பரவல் (Student t-Distribution)

(அ) **வரையறை :** t எனும் புள்ளியியல் அளவையின் மதிப்புகள், $(-\infty, \infty)$ என்ற முடிவிலா இடைவெளியில் அமைந்து, கட்டின்மை எண்ணிக்கைகள் முறையே 1, γ என்றுள்ள இரண்டு கை-வர்க்க மாறிகளின் விகிதமாக $\frac{t^2}{\gamma}$ எனும் மாறியை எழுத முடியுமானால் $\left(\text{அதாவது } \frac{t^2}{\gamma} \text{ என்பது ஒரு } \beta_2\text{-} \left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) \text{ மாறியாக இருக்குமானால்}\right)$, பின் t-ன் பரவலை ஸ்டுடன்டின் t-பரவல் என்று அழைக்கிறோம்.

இங்கு γ என்பது t-பரவலின் கட்டின்மை எண்ணிக்கை எனப்படும் மேலும், t-பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு வருமாறு :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}, -\infty < t < \infty$$

(ஆ) t-பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பு,

$$F(t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}},$$

$-\infty < t < \infty$, என்பதாகும்.

(இ) t-பரவலின் நிகழ்தகவு வளைவரை

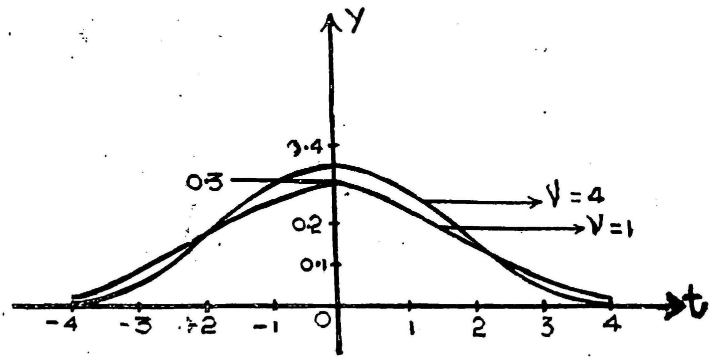
நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு,

$$y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}$$ என்று

கிடைக்கும்

$$i.e.,\ y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}$$

இங்கு வலது புறக்கோவையை t-ன் படி ஏறுவரிசையில் இருக்குமாறு எழுதுவோமானால், t-ன் படி இரட்டை எண்ணாகத் தான் இருக்கும் என்று விளங்கும். ஆகையால் இவ்வளைவரை $t = 0$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்து சீரானதாக இருக்கும். t-ன் எண்ணளவு அதிகரிக்கும் போது y-ன் மதிப்பு மிக வேகமாக குறைந்து கொண்டே வரும் என்பதை படத்திலிருந்து தெரிந்து கொள்ளலாம்.



படம் 18.

மேலும் t-அச்சானது இவ்வளைவரையின் இரண்டு பக்கங்களிலும் தொலைத்தொடு கோடாக உள்ளது, என்பதையும் அறியலாம். $t = 0$ எனும்போது, y-ன் மதிப்பு மீப்பெரிதாக இருக்கும். γ-ன் மதிப்பு மிகப் பெரிய எண்ணாக இருக்கும் போது, இது ஒரு இயல்நிலை வளைவரையாக மாறும் என்பதையும் படத்திலிருந்து அறியக்கூடும்.

t-ன் எண்ணளவு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பாகிய t_0-ஐ விட அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு P எனில், பின்

$$P = 2 \cdot \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}$$

என்று தெரியும்.

இத்தொகையைப் பயன்படுத்தி, P-ன் நிலையான மதிப்புகளுக்கு ஒப்ப, γ-ன் மதிப்பு 1-லிருந்து 60-வரை மாறும்போது கிடைக்கப் பெறும் t_0-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு, அட்டவணைப் படுத்தியுள்ளனர் இவ்வட்டவணை இறுதியாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த அட்டவணையிலிருந்து γ-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு ஒப்ப, அவ்வரிசையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு எண்ணைவிட t-ன் மதிப்பு அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு அந்த எண்ணை அடக்கியுள்ள நிரலின் உச்சியில் இருக்கும் மதிப்பாகும். உதாரணமாக $\gamma = 9$ என்றால், $t > 2{\cdot}26$ என்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $0{\cdot}05$-க்குச் சமமாகும்.

மேலும் t-ன் மதிப்பு 60-க்கு அதிகமாக இருக்குமானால், t-பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாகும் என்றும் நமக்குத் தெரியும்.

(ஈ) விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

(i) t-பரவலின் கூட்டுச் சராசரி,

$$\mu = E(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)}\, dt$$

$$i.e., \mu = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)}\left[\int_{-\infty}^{0} t\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\right.$$

$$\cdot\, dt + \int_0^\infty t\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \cdot dt \Bigg]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\left[-\int_0^0 t\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \cdot dt\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty t\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \cdot dt\right]$$

$$= 0$$

(*ii*) ஆதியை மையமாகக் கொண்ட இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையின் மதிப்பு

$$\therefore \quad \mu_2' = E(t^2) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} t^2$$

$$\cdot \left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \cdot dt$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\int_0^\infty t^2\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \cdot dt$$

இதில் $x = \frac{t^2}{\gamma}$ என்றிட. $\gamma\, dx = 2t \cdot dt$

$$\therefore \quad \mu_2' = \frac{2}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\infty \gamma x (1 + x)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \frac{\gamma}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2} - 1}}{(1 + x)^{\frac{\gamma + 1}{2}}}\, dx$$

$$= \frac{\gamma}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2} - 1}}{(1 + x)^{\frac{3}{2} + \frac{\gamma}{2} - 1}}\, dx$$

$$= \frac{\gamma}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} B\left(\frac{3}{2}, \frac{\gamma}{2} - 1\right)$$

i.e., $\mu_2' = \frac{\gamma}{\gamma - 2}$ ||

(ii) மாறுபாடு, Var $(t) = E(t^2) - [E(t)]^2$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 2} - 0 = \frac{\gamma}{\gamma - 2} \quad ||$$

(iv) பொதுவாக t-ன் ஒற்றை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் பூஜ்யமாக இருக்கும் என்று கண்டுகொள்ளலாம்.

மேலும் இரட்டைவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை,

$$\mu_{2r}' = 2\int_0^{\infty} \frac{t^{2r}\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)}\, dt$$

$$= \frac{2 \cdot \gamma^r}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{x^{r + \frac{1}{2} - \gamma}}{(1+x)^{\frac{\gamma+1}{2}}}\, dx\ ;$$

$x = \frac{t^2}{\gamma}$ என்றிட,

$$= \frac{2\gamma^r}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot B\left(r + \frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2} - r\right);$$

$\left(\text{இங்கு } r < \frac{\gamma}{2} \text{ என்க}\right)$

$$= \frac{(2r - 1)(2r - 3) \cdots\cdots\cdots 1}{(\gamma - 2)(\gamma - 4) \cdots (\gamma - 2r)} \cdot \gamma^r.$$

7·6-1 தேற்றம் 1 : $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன μ, σ^2 என்பன வற்றை முறையே பொதுக்கூட்டுச்சராசரியாகவும், மாறுபாடாகவும் உடைய n சரிசமவாய்ப்பு இயல்நிலை மாறிகள் என்றும், $(n - 1)$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = ns^2$$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{S}$$ என்ற மாறி, $\gamma = n - 1$ எனும் துணை அலகை உடைய ஒரு t-பரவலை உருவாக்கும்.

நிரூபணம் :

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{S}$$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்,

$$\frac{t^2}{\gamma} = \frac{(\bar{x} - \mu)^2 \cdot n}{(n - 1)\, S^2}$$ என்று கிடைக்கும்.

$$\text{i.e.,}\quad \frac{t^2}{\gamma} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \dfrac{(\bar{x} - \mu)^2}{\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ns^2}{\sigma^2}\right)}$$

ஆனால், $\left[\frac{1}{2} \cdot \dfrac{(\bar{x} - \mu)^2}{\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}\right]$ என்பது $\left(\frac{1}{2}\right)$-ஐ துணை அலகாக உடைய ஒரு காமா மாறி என்றும், $\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ns^2}{\sigma^2}\right)\right]$ என்பது $\left(\frac{\gamma}{2}\right)$-ஐ துணை அலகாக உடைய ஒரு காமா மாறி என்றும் நிறுவியுள்ளோம். எனவே, இவ்விரண்டு மாறிகளின் விகிதமாகிய $\frac{t^2}{\gamma}$ என்பது $\frac{1}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ என்பனவற்றை துணை அலகுகளாக உடைய இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறி என்று அறியலாம்.

மேலும் இம்மாறியின் பரவலின் நிகழ்தகவு வகையீடு,

$$dP' = \frac{\left(\frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot d\left(\frac{t^2}{\gamma}\right)}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma + 1)}}, \quad 0 \leq t^2 < \infty$$

என்றாகும்.

எனவே t என்ற மாறியின் பரவல்,

$$dP = \frac{dt}{\sqrt{\gamma} \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma + 1)}}, \quad -\infty < t < \infty$$

என்று கிடைக்கப் பெறலாம்.

இங்கு t^2-ன் மதிப்பு $(0, \infty)$ என்ற வீச்சில் அமைவதற்கு ஒப்ப, t-ன் மதிப்பு $(-\infty, \infty)$ எனும் வீச்சில் அமையும் என்றும், இவ்வீச்சு முழுவதும் கணக்கிடப்படும் dP-ன் தொகை மதிப்பு ஒன்று என இருக்கவேண்டுமாதலின், 2 என்ற காரணி நீக்கப் பட்டுள்ளது என்றும் அறிந்துகொள்ளவேண்டும்.

இவ்வாறு, dP-ஐ நிகழ்தகவு வகையீடாக உடைய பரவல் ஒரு t-பரவல் என்று தெரிகிறது.

7.7 ஸ்நெடிகாரின் F-பரவல் (Snedecor's F-Distribution)

(அ) வரையறை :

F எனும் புள்ளியியல் மாறி ஏற்கும் எல்லா மிகை மதிப்பு களுக்கும் ஒப்ப, நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பின் மதிப்பு

$$\frac{\gamma_1^{\frac{\gamma_1}{2}} \cdot \gamma_2^{\frac{\gamma_2}{2}} \cdot F^{\frac{\gamma_1 - 2}{2}}}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right) \cdot (\gamma_1 F + \gamma_2)^{\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}}$$ என்றிருக்குமானால்,

அம்மாறியின் பரவலை ஒரு F-பரவல் என்று கூறுகிறோம். இங்கு γ_1, γ_2 என்ற எண்களைப் பரவலின் கட்டின்மை எண்ணிக்கைகள் என்கிறோம். இப்பரவலை மாறுபாடு விகிதப்பரவல் என்றும் கூறுவதுண்டு.

(ஆ) நிகழ்தகவு வளைவரை :

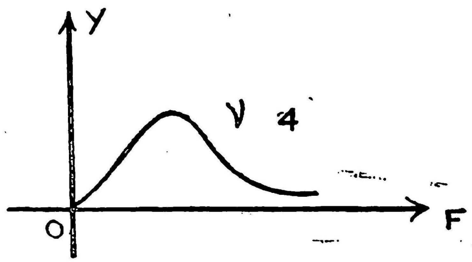
F-பரவலின் நிகழ்தகவு வளைவரையின் சமன்பாடு,

$$y = \frac{\gamma_1^{\frac{\gamma_1}{2}} \cdot \gamma_2^{\frac{\gamma_2}{2}} \cdot F^{\frac{\gamma_1 - 2}{2}}}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right) \cdot (\gamma_1 F + \gamma_2)^{\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}}$$ என்பதாகும்.

$(0 < F < \infty)$

γ_1-ன் மதிப்பு 2-ஐவிட பெரியதாக இருக்கும்போது இவ் வளைவரை மணி வடிவமுடையதாகவும், γ_2-ன் மதிப்பு 2-க்குச்

சமமாக அல்லது 2-ஐவிட குறைவாக இருக்கும்போது, வளைவரை J-வடிவமுடையதாகவும் இருக்கும். இந்த வளைவரையின்,



படம் 19.

அமைப்பு γ_1, γ_2 ஆகியவற்றின் மதிப்பைச் சார்ந்திருந்த போதிலும், $\gamma_1 > 4$ என்றிருந்தால் அதன் முக்கியமான இயல்புகள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள வளைவரையைப் போன்று இருக்கும் என அறியலாம். மேலும் இவ்வளைவரையின் முகடு, $\left(\frac{\gamma_1 \gamma_2 - 2\gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 2\gamma_1}\right)$ என்று தெரியும்.

இதன் மதிப்பு எப்பொழுதும் ஒன்றைவிடக் குறைவாக இருக்கும் என்று நன்கு விளங்கும்.

(இ) விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

பொதுவாக, ஆதியை மையமாகக்கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை, μ_r'-ன் மதிப்பு வருமாறு:

$$\mu_r' = E[F^r]$$

$$= \frac{\gamma_1^{\frac{\gamma_1}{2}} \cdot \gamma_2^{\frac{\gamma_2}{2}}}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{F^r \cdot F^{\frac{\gamma_1 - 2}{2}} \cdot dF}{(\gamma_1 F + \gamma_2)^{\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}}$$

இத்தொகையின் மதிப்பு காண, $\frac{1}{x} = 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot F$ என்றிடுவோம்.

$$\therefore \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\, dF \cdot \text{ என்றாகும்.}$$

மேலும் F-ன் மதிப்பு $(0, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் அமைவதற்கு ஒப்ப. x-ன் மதிப்பு $(0, 1)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும்.

$$\therefore \mu'_r = \frac{\gamma_1^{\frac{\gamma_1}{2}} \gamma_2^{\frac{\gamma_2}{2}}}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \int_0^1 \frac{\left[\left(\frac{1}{x}-1\right) \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right]^{r+\frac{\gamma_1-2}{2}}}{\left(\frac{\gamma_2}{x}\right)^{\frac{\gamma_1+}{2}}}$$

$$+ \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{\gamma_1^{\frac{\gamma_1}{2}} \cdot \gamma_2^{\frac{\gamma_2}{2}}}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^r \cdot \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\gamma_1} \cdot \frac{1}{(\gamma_2)^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}}}$$

$$\int_0^1 x^{\frac{\gamma_2}{2}-r-1} (1-x)^{\frac{r+\gamma_1-2}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^r}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \cdot B\left(\frac{\gamma_1}{2}+r, \frac{\gamma_2}{2}-r\right); \; r < \frac{\gamma_2}{2}$$

என்க.

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+r\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^r$$

இதிலிருந்து, கூட்டுச் சராசரியின் மதிப்பு வருமாறு :

$$\mu'_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$$

$$=\frac{\frac{\gamma_1}{2}}{\left(\frac{\gamma_2}{2}-1\right)}\cdot\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

$$=\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2-2}\right) \parallel 8 \left(\gamma_2 > 2\right)$$

ஆகையால் கூட்டுச்சராசரியின் மதிப்பு γ_1-ஐச் சார்ந்திராது என்று அறிகிறோம். மேலும் அதன் மதிப்பு ஒன்றைவிட அதிகமாகவே இருக்கும்.

$$111^{rly}\ \mu'_2=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}\cdot\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2$$

$$=\frac{(\gamma_1+2)\,\gamma_2^2}{(\gamma_2-2)(\gamma_2-4)\,\gamma_1}$$

$$\therefore\ \sigma^2=\mu'_2-(\mu'_1)^2=\frac{(\gamma_1+2)\,\gamma_2^2}{(\gamma_2-2)(\gamma_2-4)\gamma_1}-\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2-2}\right)^2$$

$$=\frac{2\gamma_2^2(\gamma_1+\gamma_2-2)}{\gamma_1(\gamma_2-2)^2(\gamma_2-4)}\ \parallel$$

7·7-1 தேற்றம் 1. $x_1, x_2, \ldots x_{n_1}$; $y_1, y_2 \ldots y_{n_2}$ என்பன σ^2-ஐ பொது மாறுபாடாக உடைய, சார்பிலா சரிசம வாய்ப்பு இயல்நிலை மாறிகளின் இருவேறு தொகுதிகளாகும்.

$$(n_1-1)\,s_1^2=\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2;\ (n_2-1)\,s_2^2=\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\bar{y})^2$$

என்றும் இருந்தால், பின்

$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)$ என்பது, $\gamma_1=(n_1-1)$, $\gamma_2=(n_2-1)$ என்பன வற்றை துணை அலகுகளாக உடைய ஒரு ஸ்நெடிகாரின் F-பரவலை உருவாக்கும்.

நிரூபணம்

F எனும் மாறியை பின்வருமாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\left[\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{(n_1 - 1)}\right]}{\left[\frac{\Sigma (y_j - \bar{y})^2}{(n_2 - 1)}\right]}$$

$$= \frac{\left(n_1 S_1^2 \gamma_1\right)}{\left(n_2 S_2^2 \gamma_2\right)} \text{ என்க.}$$

$$\text{i.e., } \frac{\gamma_1 F}{\gamma_2} = \frac{n_1 S_1^2}{n_2 S_2^2} = \frac{\left(\frac{n_1 S_1^2}{\sigma}\right)}{\left(\frac{n_2 S_2^2}{\sigma}\right)}$$

ஆனால் $\frac{n_1 S_1^2}{\sigma}$, $\frac{n_2 S_2^2}{\sigma}$ என்பன முறையே $\frac{\gamma_1}{2}$, $\frac{\gamma_2}{2}$ என்ற எண்களை துணை அலகுகளாக உடைய இரண்டு தனித்தனி காமா மாறிகள் என்று தெரியும். எனவே, அவற்றின் விகிதமாகிய $\frac{\gamma_1 F}{\gamma_2}$ என்பது, $\frac{\gamma_1}{2}$, $\frac{\gamma_2}{2}$ என்ற துணை அலகுகளை உடைய இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாக இருக்கவேண்டும். மேலும் F-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$$dP = \frac{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} F\right)^{\frac{\gamma_1 - 2}{2}} \cdot d\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} F\right)}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\gamma_1 F}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}}$$

$$\text{i.e., } dP = \frac{\gamma_1^{\frac{\gamma_1}{2}} \cdot \gamma_2^{\frac{\gamma_2}{2}} F^{\frac{\gamma_1 - 2}{2}} \cdot dF}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_1}{2}\right)(\gamma_2 + \gamma_1 F)^{\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}}$$

இந்த நிகழ்தகவு வகையீடு ஸ்நெடிகாரின் F-பரவலுக்குரியது என்று தெரியும். இவ்வாறு $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ என்பது ஒரு F-மாறி என்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு : இப்பரவல் பொது மாறுபாடாகிய σ^2-ஐ சார்ந்திராது என்று நன்கு விளங்கும். இதை γ_1; γ_2 எனும் கட்டின்மை எண்களுக்கான மாறுபாடு விகிதத்தின் பரவல் என்றும் கூறுவதுண்டு.

7·8 பிஷரின் Z-பரவல் (Fisher's Z-Distribution)

(அ) வரையறை :

F = பரவலில் $z = \frac{1}{2}\log_e F$, அல்லது $F = e^{2z}$ என்றிட அப்பரவலின் நிகழ்தகவு வகையீடு பின்வருமாறு அமையும்.

$$dP = \frac{2\,\gamma_1^{\frac{\gamma_1}{2}} \cdot \gamma_2^{\frac{\gamma_2}{2}} \cdot e^{\gamma_1 z} \cdot dz}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right) \cdot \left(\gamma_1 e^{2z} + \gamma_2\right)^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}}}, \quad -\infty < z < \infty$$

இந்த நிகழ்தகவு வகையீடால் குறிப்பிடப்படும் பரவலை Z-பரவல் என்பர்.

(ஆ) அட்டவணை

கூறு பரவலில், z-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை விஞ்சுவதற்கான நிகழ்தகவு γ_1, γ_2 ஆகியவற்றின் மதிப்பைப் பொறுத்துள்ளது. γ_1, γ_2-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு ஒப்ப, 0·05, 0·01 எனும் நிகழ்தகவுகளை அளிக்கும், z-ன் விஞ்சக்கூடிய மதிப்புகளை, *R. A.* பிஷர் எனும் கணித மேதை கணக்கிட்டு அட்டவணைப் படுத்தியுள்ளார். அந்த அட்டவணையிலிருந்து *G. W.* ஸ்நெடிகர் என்பவர், F எனும் மாறுபாடு விகிதத்திற்கான அட்டவணையை தயாரித்துள்ளார். அவ்வட்டவணையின் சில பகுதிகள் புத்தகத்தின் இறுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இங்கு மாறுபாட்டின், முறையே பெரிய மதிப்பீடுகளுக்கும், சிறிய மதிப்பீடுகளுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதத்தை, அட்டவணையிலுள்ள F-ன் மதிப்புகள் குறிக்கின்றன. மாறுபாட்டின் பெரிய மதிப்பீடுகளுக்கு ஒப்ப, γ_1-ன் மதிப்பு

அட்டவணையிலுள்ள நிரலை தீர்மானிப்பதற்கும், ν_5-ன் மதிப்பு வரிசையை தீர்மானிப்பதற்கும் பயன்படுகின்றன. குறிப்பிட்ட நிரலும், வரிசையும் சந்திக்கும் இடத்திலுள்ள இரண்டு எண்களுள், மேலேயுள்ள எண் 0·05 எனும் நிகழ்தகவை அளிக்கும் F-ன் விஞ்சக்கூடிய மதிப்பையும், கீழே உள்ள எண் 0·01 எனும் நிகழ்தகவை அளிக்கும் F-ன் விஞ்சக்கூடிய மதிப்பையும் குறிக்கின்றன. இம்மதிப்புகளை முறையே "5 சதவீதப் புள்ளி", "ஒரு சதவீதப் புள்ளி" என்று அழைப்பதுண்டு. ஒரு சதவீதப் புள்ளி, ஐந்து சதவீதப் புள்ளியைவிட பெரியதாகவே இருக்கும்.

மேலும், ஐந்து சதவீத புள்ளியை விட குறைவான F-ன் மதிப்புகள் குறிப்பிடத் தகுந்தவையல்ல என்றும்; 5 சதவீத புள்ளிக்கும், ஒரு சதவீத புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட F-ன் எந்த ஒரு மதிப்பும் முதல் புள்ளியைப் பொறுத்து குறிப்பிடப்பட வேண்டிய ஒன்றாகும் என்றும், ஆனால் இரண்டாவது புள்ளியைப் பொறுத்து குறிப்பிடத்தகுந்தது அல்ல என்றும் கூறுவர். இதேபோன்று ஒரு சதவீத புள்ளியை விட அதிகமான மதிப்புகள் மிகவும் குறிப்பிடத் தகுந்தவை என்றும் சொல்வதுண்டு.

இந்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், கொடுக்கப்பட்ட கூறுகள் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டனவா, அல்லது சிறப்புப் பண்புடைய தனிக் கூறுகளா என்று கண்டறியலாம்.

பயிற்சி 6.

1. $X_1, X_2, \dots X_n$ என்பன ஒரு பொது கூட்டுச் சராசரியை உடைய சார்பிலா காஷி மாறிகள் என்றால், சிறப்பியல்புச் சார்பின் உதவியால், $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ என்பதும் ஒரு காஷி மாறி என்று நிரூபி.

2. X, Y என்ற இரண்டு சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே $\bar{X}, \bar{Y}$ என்றும், மாறுபாடுகள் முறையே σ_1^2, σ_2^2 என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், $Z = \left(\frac{X-\bar{X}}{Y-\bar{Y}}\right)$ எனும் மாறி ஒரு காஷி பரவலை உருவாக்கும் என்றும், அப்பரவலின் நிகழ்தகவு வகையீடு

$$dP = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot dz}{\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 z^2)}$$ என்றும் நிறுவு.

3. X என்பது திட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு இயல்நிலை மாறி எனில், $\left(\frac{X^2}{2}\right)$ என்பது $\frac{1}{2}$-ஐ துணையலகாக உடைய ஒரு காமா மாறியாக இருக்கும் என்று நிரூபி.

4. n-ஐ துணையலகாகக் கொண்டுள்ள ஒரு காமா மாறியின் வர்க்கமாக Y எனும் மாறி அமைந்திருக்குமானால், Y-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு

$$dP = \frac{y^{\frac{1}{2}(n-2)} \cdot e^{-\sqrt{y}}}{2\,\Gamma(n)} \cdot dy$$ என்று காட்டு.

5. X என்ற காமா மாறியின் துணையலகு 10 என்றால், $Y = \frac{1}{X}$ என்ற மாறியின் பரவல் சார்பைக் கண்டுபிடி.

6. X, Y, என்பன இரண்டு தனித்தனி காமா மாறிகளாக இருக்குமானால், பின்வரும் மாறிகளின் பரவலைக் கண்டுபிடி.

(i) $X+Y$, (ii) $\frac{X}{Y}$, (iii) $\frac{X}{X+Y}$, (iv) $\frac{X-Y}{X+Y}$

7. X, Y என்ற காமா மாறிகள் சார்பிலாதனவாக இருப்பின் $U = X+Y$, $V = \frac{X}{Y}$ என்ற மாறிகளும் சார்பிலாதன என்றும்; மேலும் U என்பது ஒரு காமா மாறி என்றும், V என்பது ஒரு இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறி என்றும் நிறுவு.

8. $\beta_1(l, m)$ என்ற பீட்டா மாறி, $m = n$ எனும்போது, $x = \frac{1}{2}$ என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருக்கும் என்று காட்டு.

9. X என்பது l, m என்பனவற்றைத் துணையலகுகளாக உடைய ஒரு முதல் வகை பீட்டா மாறியாக இருந்தால், பின் $Y = \sqrt{X}$ என்ற மாறியின் கூட்டுச் சராசரி,

$$\bar{Y} = \frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)\cdot\Gamma\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}$$ என்று காட்டு.

10. $\frac{dv}{dx} = \frac{-v(x-a)}{(b+cx)}$ என்ற வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டில், $c^2 \cdot k = [c(a+c) - b]$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், தொகை காண்பதில் வரும் மாறிலிகளை தக்கவாறு எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம், இந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு, $2k$-ஐ கட்டின்மை எண்ணுகை உடைய, ஒரு கை-வர்க்க மாறியாக இருக்கும் என்று நிரூபி.

11. ஒரு கை-வர்க்கப் பரவலின் கட்டின்மை எண்ணிக்கை γ என்றும், கூட்டுச் சராசரியை மையமாகக் கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை μ_r என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

$\mu_{r+1} = 2r(\mu_r + \gamma\mu_{r-1}),\ r \geq 1$ என்று நிரூபி.

12. n-ன் மதிப்பு மிகப் பெரிய எண்ணுகை அதிகரிக்கும்போது, $\sqrt{2X^2}$ என்ற மாறி ஒரு இயல்நிலைப் பரவலை உருவாக்கும் என்றும், அதன் கூட்டுச் சராசரி $\sqrt{2n-1}$ என்றும், மாறுபாடு ஒன்று என்றும் காட்டு.

13. கட்டின்மை எண்ணிக்கை n என்றுள்ள, ஸ்டூடண்டின் t-பரவலில், ஆதியைப் பொறுத்த சராசரி விலக்கம்

$$\frac{\sqrt{n}\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$ என்று காட்டு.

14. ஸ்டூடண்டின் t-பரவலில் $\gamma = 1$ என்றிருக்குமானால், அது ஒரு காஷி பரவலாக மாறும் என்று நிரூபி.

15. t எனும் ஸ்டூடண்டு மாறியின் திட்டமாக்கப்பட்ட மதிப்பு $t\sqrt{\frac{\gamma-2}{\gamma}}$ என்று காட்டு. இதிலிருந்து கட்டின்மை எண்ணிக்கை γ-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, t-ன் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாகும் என்று நிரூபிக்கவும்.

16. F-பரவலில் $n_1 = 5, n_2 = 10$ என்றால்; $P(F \leq a) = 0{\cdot}05$ $P(F \leq b) = 0{\cdot}95$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு, a, b என்ற மாறிலிகளைக் கண்டுபிடி.

17. $X = \left[\dfrac{\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot F}{1 + \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} F} \right]$ என்ற மாறி ஒரு முதல் வகை-பீட்டா மாறி என்றும், அதன் துணை அலகுகள் $\left(\dfrac{\gamma_1}{2} - 1\right)$, $\left(\dfrac{\gamma_2}{2} - 1\right)$ என்றும் நிறுவு.

18. Z-பரவலின் சிறப்பியல்புச் சார்பு

$$\phi(t) = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\frac{it}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{\gamma_2 - it}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\dfrac{\gamma_1 + it}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\gamma_1}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{\gamma_2}{2}\right)}$$

என்று நிரூபி.

8. ஒட்டுறவும், மாறிகளின் தொடர்பும்

(CORRELATION AND REGRESSION)

8·1 ஒட்டுறவுக் கெழு (Correlation Coefficient)

இதுகாறும் நாம் ஒரு மாறிப் பரவல்களைப் பற்றியும், அவற்றின் சிறப்புப் பண்புகள் சிலவற்றைப்பற்றியும் பார்த்தோம். இனி இரு மாறிப் பரவல்களில் இரண்டு மாறிகளும் ஒருங்கே மாறுவதால் ஏற்படும் விளைவுகளைப்பற்றி அறிய, அம்மாறிகளுக் கிடையே உள்ள தொடர்புகளை இங்கு ஆராய்வோம்.

(i) ஒரு வகுப்பில் படிக்கும் மாணவர்களின் உயரத்தையும், எடையையும்,

(ii) குறிப்பிட்ட நிலப்பகுதிகளில் பெய்த மழையின் அளவையும், அதன் காரணமாக விளைச்சலில் அதிகமாக கிடைக்கும் விளைபொருள்களின் அளவையும்,

(iii) அன்றாட வாழ்க்கையில் தேவைப்படும் ஒரு பொருளின் தேவை அளவையும், அதன் விலையையும், ஆகியவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றைக் குறிக்கக்கூடும்.

மேலும் ஒரு மாறிப் பரவல்களைப் பொருத்தவரை, $E[(x-\bar{x})^2]$ என்ற எதிர்நோக்கல் x-ல் ஏற்படும் மாற்றலை அளக்கப் பயன்படும் என்று கண்டோம். இதேபோன்று x, y என்ற இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினை அல்லது உறவை அளக்கும் கணியமாக

$$\frac{E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})]}{\sqrt{E(x-\bar{x})^2 \cdot E(y-\bar{y})^2}}$$ எனும் விகிதத்தைப் பயன் படுத்துகின்றனர். இம்மதிப்பை x, y-க்கிடையே உள்ள "ஒட்டுறவுக் கெழு" என்று கூறுவர் இதை r_{xy} என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

$$\therefore \quad r_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \cdot \text{Var}(y)}} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y} \text{ என்றாகும்.}$$

இக்கணியம் கார்ல் பியர்சன் என்பவரால் பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் வரையறுக்கப்பட்டது.

இங்கு திட்டவிலக்கங்கள் σ_x, σ_y என்பன மிகை எண்களாக இருக்குமாதலால், ஒட்டுறவுக் கெழுவின் அடையாளம்; உடன் மாறுபாடு μ_{11}-ஐப் பொருத்து அமையும் என்று அறியலாம். மேலும் சமச்சீர் தன்மை காரணமாக, $r_{yx} = r_{xy}$ என்றும் கண்டு கொள்ளலாம்.

8.11 தேற்றம்: இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு, அளக்கும் மையமாக எடுத்துக்கொள்ளப்படும் ஆதியையோ, அளக்கும் அலகையோ சார்ந்திருக்காது.

நிரூபணம் :

x, y என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு மாறிகள் என்க.

$x = a\,x' + b$, $y = c\,y' + d$ என்றிருக்குமாறு x', y' என்ற வேறு இரண்டு மாறிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு a, b, c, d என்பன மாறிலிகள்.

இப்பொழுது,

$$E(x) = a \cdot E(x') + b,$$

$$E\,)y) = e \cdot E\,(y') + d \quad \text{என்று தெரியும்.}$$

$$\text{i.e.,} \quad \bar{x} = a\,\bar{x}^1 + b,$$

$$\bar{y} = e\,\bar{y}' + b \text{ என்றாகும்.}$$

$$\therefore \quad (x - \bar{x}) = (a\,x' + b) - (a\,\bar{x}' + b) = a\,(x' - \bar{x}')$$

111^{riy} $(y - \bar{y}) = e\,(y^1 - \bar{y}^1)$ என்று கண்டுகொள்ளலாம்.

$$\text{எனவே } r_{xy} = \frac{E[\,(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})\,]}{\sqrt{E\,(x - \bar{x})^2 \cdot E\,(y - \bar{y})^2}}$$

$$= \frac{E\,[a\,(x' - \bar{x}') \cdot e\,(y' - \bar{y}')\,]}{\sqrt{E\,[a^2\,(x' - \bar{x}')^2] \cdot E[e^2(y' - \bar{y}')\,]}}$$

$$= \frac{ae \cdot E[(x' - \bar{x}') \cdot (y' - \bar{y}')]}{\sqrt{a^2 e^2} \cdot \sqrt{E(x' - \bar{x}')^2 \cdot E(y' - \bar{y}')^2}}$$

இதிலிருந்து, a,e எனும் இரண்டு மாறிகளின் அடையாளங்கள் ஒன்றாக இருந்தால்,

$r_{xy} = r_{x'y'}$ என்றும், அவை அடையாளங்களில் மாறு பட்டிருந்தால்,

$r_{xy} = -r_{x'y'}$ என்றும் கிடைக்கின்றன.

$\therefore |r_{xy}| = |r_{x'y'}|$ என்று பெறலாம்.

இவ்வாறு ஆதியை மாற்றுவதாலோ, அல்லது அளக்கும் அலகை மாற்றுவதாலோ. r_{xy}-ன் மதிப்பு எண்ணளவில் மாறாது என்று அறிகிறோம். அதாவது r_{xy} என்பது ஒரு சாதாரண எண்ணாக இருக்கும் என்று பொருள். இத்தன்மையைப் பயன் படுத்தப்படுத்துவதன் மூலம், ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிட, நமக்கு வசதியாக அமையக்கூடிய ஆதியையும், அளக்கும் அலகையும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

8·1-2 தேற்றம் : x, y என்பன இரண்டு தனித்தனியே (சார்பிலா) மாறிகளாயின், அவை ஒட்டுறவு அற்றனவாக இருக்கும்.

x, y தனித்தனி மாறிகள் என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், அவை இரண்டும் சார்புடையன அல்ல என்றாகிறது. ஆகையால் அவற்றின் உடன் மாறுபாடு பூஜ்யமாக இருக்கவேண்டும். ஏனெனில்,

$$\text{cov}\ (x, y) = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$$
$$= E[x - \bar{x}] \cdot E[y - \bar{y}]$$
$$= [E(x) - \bar{x}] \cdot [E(y) - \bar{y}]$$
$$= 0 \cdot 0 = 0$$

$\therefore\ r_{xy} = 0$ என்றாகும்.

i.e., x, y என்பன ஒட்டுறவு அற்ற மாறிகள் என்று தெரிகிறது.

குறிப்பு: இத்தேற்றத்தின் மறுதலை எப்பொழுதுமே உண்மையாக இருக்கும் என்று கூறமுடியாது. அதாவது இரண்டு மாறிகள் ஒட்டுறவு அற்றவையாக இருப்பினும், அவை ஒன்றையொன்று சார்ந்திருக்கக் கூடும்.

உதாரணமாக, x என்ற மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு ஏதேனும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில், ஒரு நிலையான எண் எனக்கொள்வோம். அதாவது, $-1 \leq x \leq 1$ எனும்போது, x-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, $f(x) = \frac{1}{2}$ என்றும்,

$y = x^2$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\text{பின்,} \quad \bar{x} = E(x) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$$

$\therefore \quad E(x) \cdot E(y) = 0$ என்றாகிறது.

மேலும், $E(xy) = E(x \cdot x^2) = E(x^3)$

$$= \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right] = 0$$

ஆகையால், $\text{cov}(x,y) = E[(x - \bar{x}](y - \bar{y})]$

$= E[xy] - \bar{x} \cdot \bar{y}$

$= 0$ என்று கிடைக்கின்றது.

எனவே, x, y என்பன ஒட்டுறவு அற்ற மாறிகளாகும்.

ஆனால் $y = x^2$ என்று எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம்.

அதாவது x, y ஒன்றையொன்று சார்ந்துள்ளன.

இவ்வாறு, மறுதலை உண்மையாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை என்று அறியலாம். இதேபோன்று வேறு சில உதாரணங்களும் கொடுக்கலாம்.

8.1-3 ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லை மதிப்பு காணல்: x, y என்பன ஏதேனும் இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகள் என்றால்

$$[E(xy)]^2 \leq [E(x^2)] \cdot [E(y^2)]$$ என்று தெரியும்.

இச்சமனின்மையில் x, y - க்குப் பதிலாக, $(x - \bar{x})$, $(y - \bar{y})$ என்று பிரதியிட $\{E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})]\}^2 \leq E(x-\bar{x})^2 E(y-\bar{y})^2$ என்றாகும்.

$$i.e., \quad \frac{\{E[(x-\bar{x}) \cdot (y-\bar{y})]\}^2}{E(x-\bar{x})^2 \cdot E(y-\bar{y})^2} \leq 1$$

$$i.e., \quad \left\{ \frac{E[(x-\bar{x}) \cdot (y-\bar{y})]}{\sqrt{E(x-\bar{x})^2 \cdot E(y-\bar{y})^2}} \right\}^2 \leq 1$$

$$i.e., \quad [r_{xy}]^2 \leq 1$$

$$i.e., \quad |r_{xy}| \leq 1$$

$$i.e., \quad -1 \leq r_{xy} \leq 1$$

அதாவது ஒட்டுறவுக்கெழுவின் மதிப்பு $(-1, 1)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் என்று தெரிகிறது.

$r_{xy} = 1$ எனில், x, y என்பன நிறைவான ஒட்டுறவு உடையன என்றும்,

$r_{xy} = -1$ எனில், அவை நிறைவான எதிரிடை ஒட்டுறவு உடையன என்றும் கூறுவது வழக்கம். (இதை நிறைவான நேர்மாறு ஒட்டுறவு என்றும் கூறலாம்.)

8.2 மாறிகளின் தொடர்பு (Regression)

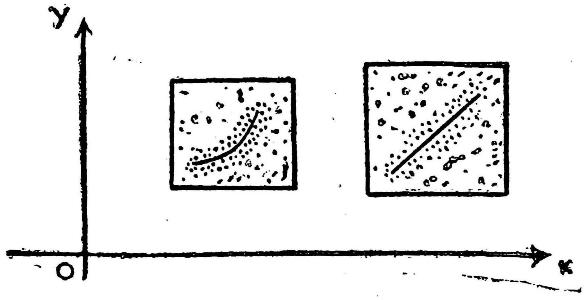
x, y எனும் இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகள் ஏற்கும் பல்வேறு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், அம்மாறிகள் இரண்டும் எந்த அளவு உறவுடையன என்பதை அறியும் முறையை இங்கு காண்போம்.

இவ்விரு மாறிகளும் ஏற்கும் n ஜோடி மதிப்புகளை (x_1, y_1), (x_2, y_2) ……… (x_n, y_n) என்க. இவற்றை n வெவ்வேறு புள்ளி களின் ஆயக்கூறுகள் எனக் கருதுவோமானால், அப்புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிப்பிடமுடியும். இத்தகைய புள்ளிகள் அடங்கிய வரைபடத்தை "சிதறல் விளக்கப்படம்" (Scatter

Diagram) என்பர். இப்படத்தின் மூலம் x, y என்ற மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர் எத்தகையது என்பதை ஓரளவு அறிய முடியும். ஆனால் இப்படத்தைக் கொண்டு x, y-க்கிடையே உள்ள தொடர்பின் அளவைக் கணக்கிட இயலாது. அதற்குப் பின்வரும் முறையை பயன்படுத்துகிறோம்.

(x, y)-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்காக வரையப்பட்ட சிதறல் விளக்கப்படத்தை நன்கு கவனித்தால், அதில் உள்ள புள்ளிகள் ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவரையின் அருகில் மிக அடர்த்தியாகவும், மற்ற இடங்களில் அடர்த்தியாக இல்லாமல் இங்கொன்றும், அங்கொன்றுமாகவும் காணப்படும். இவ்வளைவரையை "மாறிகளின் தொடர்பு வளைவரை" என்று அழைப்பதுண்டு, இது ஒரு நேர் கோடாகவும் இருக்கக்கூடும். [படத்தைப் பார்க்கவும்]

இவ்வாறு அமையும் வளைவரையின் சமன்பாடு, மாறிகளின் தொடர் அணுகக்கூடிய சார்புடை உறவைக்குறிக்கும். இந்த வளைவரை ஒரு நேர்கோடாக இருந்தால், மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு "ஒரு நேர்கோட்டு மாறிகளின் தொடர்பு" அல்லது "ஒருபடி மாறிகளின் தொடர்பு" எனப்படும். அக்கோடு மாறிகளன் தொடர்புக்கோடு என்று அழைக்கப்படும். மாறிகளின் தொடர்க் கோடானது, ஏதேனும் ஒரு மாறியின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கு ஒப்பான மற்றொரு மாறியின் மதிப்பீட்டிற்கு உத்தமப் பொருத்தமானதாகும். இவ்வாறு



படம் 20.
(சிதறல் வரைபடம்)

இரண்டு கோடுகள் உண்டு என்று அறியலாம். அவற்றுள் ஒன்றை. x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு என்றும் மற்றொன்றை y-ன் மீது x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு என்றும் கூறுவர். கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் x-ன் மதிப்பிற்கு

ஒப்பான y-ன் உத்தம மதிப்பீடுகளை முதல் கோட்டிலிருந்தும், அதேபோன்று y-ன் மதிப்பிற்கு ஒப்பான x-ன் உத்தம மதிப்பீடுகளை இரண்டாவது கோட்டிலிருந்தும் கிடைக்கப் பெறலாம்.

இக்கோடுகள் இரண்டும் ஒன்றோடொன்று இணைந்திருக்குமாயின், x, y மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவு நிறைவானது என்றும், அவை ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொண்டால், அம்மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை என்றும் அறியலாம்.

8·3 மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடு காணுதல் :

முதலில், x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டை,

$y = a + bx$ எனக் கொள்வோம் ....(1)

இங்கு a, b என்ற மாறிகளின் மதிப்பைப் பின்வருமாறு கணக்கிட வேண்டும். இந்த சமன்பாட்டிலிருந்து, x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒப்ப, y-ன் சராசரி மதிப்பின் உத்தம மதிப்பீட்டைப் பெறலாம். மேலும் மீச்சிறுப்படிக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி, இச்சமன்பாட்டால் கிடைக்கப்பெறும் y-ன் மதிப்பீடுகளிலிருந்து, பரவலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள y-ன் சரியான மதிப்புகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மிகக் குறைவானதாக இருக்குமாறு a, b என்பனவற்றின் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

(x, y)-க்கு (x_i, y_i) என்ற ஜோடி மதிப்பு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை p_i எனக்கொள்வோம். x_i என்ற x-ன் மதிப்பிற்கு ஒப்ப நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் y-ன் மதிப்பீடு $(a + b\,x_i)$ என்று தெரிகிறது ஆகையால்,

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot [\, y_i - (a + b\,x_i)\,]^2$$ என்று எடுத்துக்

கொண்டால், S-ன் மதிப்பு மீச்சிறிதாக இருக்குமாறு a, b-ஐக் கணக்கிட வேண்டும். எனவே a, b-ஐச் சார்ந்த S-ன் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் பூஜ்யத்திற்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்; அதாவது

$\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண, a, b-ன் மதிப்புகளைப் பெறலாம். இச்சமன்பாடுகளை இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் என்று அழைப்பதுண்டு.

இப்பொழுது,

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i} p_i \cdot 2 \, [\, y_i - (a + bx_i) \,] \cdot (-1)$$

$$= -2 \sum_{i} [\, p_i \, y_i - a \, p_i - b \, p_i \, x_i \,]$$

$$= -2 \, [\, \bar{y} - a - b \, \bar{x} \,] \qquad (\because \; \Sigma \, p_i = 1)$$

111ly $$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i} p_i \cdot 2 \, [\, y_i - (a + b \, x_i) \,] \, (- x_i)$$

$$= -2 \sum_{i} [\, p_i \cdot x_i \, y_i - a \, p_i \, x_i - b \, p_i \, (x_i)^2 \,]$$

$$= -2 \, [\, (\mu_{11} + \bar{x}\bar{y}) - a \cdot \bar{x} - b \, (\sigma x^2 + \bar{x}^2) \,]$$

ஆகையால், இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளாவன :

$$\bar{y} - a - b \, \bar{x} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\mu_{11} + \bar{x}y - a \cdot \bar{x} - b \, (\sigma x^2 + \bar{x}^2) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து a-ஐ நீக்க,

$\mu_{11} - b \cdot \sigma x^2 = 0$ என்று கிடைக்கும்.

அதாவது,

$$b = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}$$

அதாவது, கோடு (1)-ன் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{\mu_{11}}{\sigma x^2}$

அடுத்து சமன்பாடு (2)-ஐ சமன்பாடு (1)-உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க, நேர்கோடு, (1) $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது என்று விளங்கும். எனவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.

$(y - \bar{y}) = \dfrac{\mu_{11}}{\sigma x^2} (x - \bar{x})$ ……… (4), என்றுகும்.

இதுதான் x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடாகும். இங்கு $\left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right)$-ஐ '$x$-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு'' என்று கூறுவர்.

இதேபோன்று y-ன் மீது x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு

$$(x - \bar{x}) = \frac{\mu_{11}}{\sigma y^2}(y - \bar{y}) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$ என்று நிறுவலாம்.

இங்கு $\left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right)$ என்பது ''y-ன் மீது x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு'' எனப்படும்.

குறிப்பு : (i) மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் இரண்டும் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும். அதாவது, இவ்விரு கோடுகளுக்கும் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது பொதுவான புள்ளியாகும்.

(ii) மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்களை முறையே b_{yx}, b_{xy} என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். அதாவது,

$$b_{yx} = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}; \quad b_{xy} = \frac{\mu_{11}}{\sigma y^2}$$

$$\therefore \quad b_{yx} \cdot b_{xy} = \frac{(\mu_{11})^2}{\sigma x^2 \cdot \sigma y^2}$$

$$= r^2 \qquad (r_{xy}\text{-ஐ } r \text{ என்று குறிப்பிடலாம்})$$

எனவே ஒட்டுறவுக் கெழுவை, மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்களுக்கிடையே உள்ள பெருக்கிடை எண் என்றும் கூறலாம்.

(iii) σx, σy என்பன மிகை எண்களாதலின், μ_{11}-ஐப் பொருத்துத்தான் r, b_{yx}, b_{xy} ஆகியவற்றின் அடையாளங்கள் அமையும். மேலும், b_{yx}, b_{xy} இவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றின் மதிப்பு ஒன்றைவிடக் அதிகமாக இருந்தால், மற்றென்றின் மதிப்பு ஒன்றைவிட குறைவாக இருக்கவேண்டும். அல்லது, அவை ஒவ்வொன்றின் மதிப்பும் ஒன்றுக்குச் சமமாக இருக்கலாம்.

8·3-1 தேற்றம் : மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்களின் மதிப்புகள் ஆதியைப் பொருத்து அமையாது ; ஆனால், அளக்கப் பயன்படுத்தும் அலகைச் சார்ந்திருக்கும்.

நிரூபணம் :

x, y என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகள் எனக் கொள்வோம். u, v என்ற வேறு இரண்டு மாறிகளைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

$$x = a + bu, \qquad y = c + dv$$

$$\text{i.e}, \quad u = \frac{x - a}{b}, \qquad v = \frac{v - c}{d}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = a + b\bar{u}, \ \bar{y} = c + d\bar{v}$$ என்று பெறலாம்.

இப்பொழுது,

$$b_{yx} = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}$$

$$= \frac{\sum_i p_i \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i p_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum_i p_i \cdot b(\mu_i - \mu) \cdot d(v_i - \bar{v})}{\sum_i p_i \cdot b^2 \cdot (\mu_i - \bar{u})^2}$$

$$= \frac{bd \sum_i p_i (\mu_i - \mu)(v_i - \bar{v})}{b^2 \sum_i p_i \cdot (u_i - \bar{u})^2}$$

$\text{i.e.}, \ b_{yx} = \frac{d}{b} \cdot b_{vu}$ என்று கிடைக்கிறது.

$111^{rly} \ b_{xy} = \frac{b}{d} \cdot b_{uv}$ என்றும் நிறுவலாம்.

இவ்வாறு, அளக்க அடிப்படையாகக் கொள்ளும் ஆதியைச் சார்ந்திராமல், அளக்கப் பயன்படும் அலகைப் பொறுத்துத்தான் மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்களின் மதிப்புகள் அமையும் என்று அறிகிறோம்.

8.3.2 தேற்றம் : மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம்

$$\tan^{-1}\left[\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{\sigma x\,\sigma y}{\sigma x^2+\sigma y^2}\right)\right]$$ -க்குச் சமமாகும்.

நிரூபணம்:

x-ன் மேல் y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டின் சாய்வு விகிதத்தை m_1 என்றும், y-ன் மேல் x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டின் சாய்வு விகிதத்தை m_2 என்றும் கொள்வோமானல்,

$$m_1 = \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right),\; m_2 = \left(\frac{\sigma y^2}{\mu_{11}}\right)$$ என்று கிடைக்கும்.

இவ்விரு கோடுகளுக்கும் இடையே உள்ள கோணத்தை θ என்க. பின்,

$$\tan\theta = \frac{m_1 \sim m_2}{1+m_1\cdot m_2}$$

$$\therefore\quad \tan\theta = \frac{\dfrac{\sigma y^2}{\mu_{11}} - \dfrac{\mu_{11}}{\sigma x^2}}{1+\dfrac{\sigma y^2}{\sigma x^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sigma y^2}{r\,\sigma x\,\sigma y} - \dfrac{r\,\sigma x\,\sigma y}{\sigma x^2}}{\left(\dfrac{\sigma x^2+\sigma y^2}{\sigma x^2}\right)} \qquad \left(\because\; r = \frac{\mu_{11}}{\sigma x\,\sigma y}\right)$$

$$= \left(\frac{1-r^2}{r}\right)\cdot\left(\frac{\sigma x\,\sigma y}{\sigma x^2+\sigma y^2}\right)$$

$$i.e.,\; \theta = \tan^{-1}\left[\left(\frac{1-r^2}{r}\right)\cdot\left(\frac{\sigma x\,\sigma y}{\sigma x^2+\sigma y^2}\right)\right]$$

குறிப்பு : (*i*) இங்கு $r = \pm 1$ என்றிருந்தால், $\theta = 0$ என்றுகும். அதாவது இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றோடொன்று இணைந்து இருக்கும். ஆகையால் x, y எனும் மாறிகளுக்கிடையே

உள்ள ஒட்டுறவு நிறைவானது எனில், இருகோடுகளும் ஒன்ருகி விடும்.

(ii) இதேபோன்று $r = 0$ எனில் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் இரண்டும், $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளியில் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் என்று அறியலாம். அதாவது x, y மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லையெனில், மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும்.

இவ்வாறு, மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் அமைப்பைக் கொண்டு, மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவு எத்தன்மையானது என்று தீர்மானிக்கக்கூடும்.

8.4 மதிப்பீட்டின் திட்டப் பிழை: (Standard Error of Estimate)

x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோட்டின் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் மதிப்பீடுகளிலிருந்து, y-ன் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் சராசரி வர்க்க விலக்கத்தை S_y^2 என்று குறிப்பிடுவோம்.

$$\therefore \quad S_y^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,[y_i - (a + bx_i)]^2$$

$$= \sum_i p_i \cdot [(y_i - a) - b \cdot x_i]^2$$

ஆனல் $a = \bar{y} - \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right) \underline{x}$ என்றும், $b = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}$ என்றும் தெரியும்.

$$\text{எனவே,} \quad S_y^2 = \sum_i p_i \left[y_i - \bar{y} + \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right)\bar{x} - \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\, x_i \right]^2$$

$$= \sum_i p_i \left[(y_i - \bar{y}) \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right) (x_i - \bar{x}) \right]^2$$

$$= \sum_i \left[p_i (y_i - \bar{y})^2 + \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right)^2 p_i (x_i - \bar{x})^2 \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right) \cdot p_i (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \right]$$

$$= \sum_i p_i (y_i - \bar{y})^2 + \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right)^2 \cdot \sum_i p_i$$

$$\cdot (x_i - \bar{x})^2 - 2 \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right) \cdot \sum_i p_i (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

$$= \sigma y^2 + \left(\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}\right)^2 \cdot \sigma x^2 - \frac{2 \mu_{11}}{\sigma x^2} \cdot \mu_{11}$$

$$= \sigma y^2 + \frac{(r\, \sigma x\, \sigma y)^2}{\sigma x^2} - 2 \frac{(r\, \sigma x\, \sigma y)^2}{\sigma x^2}$$

$$= \sigma y^2 - r^2 \sigma y^2$$

i..e, $S_y^2 = (1 - r^2)\, \sigma y^2$

இவ்வாறு $S_y = \sqrt{1 - r^2} \cdot \sigma_y$ என்று கிடைக்கப் பெறும் மதிப்பை, y-மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை என்று கூறுவர்.

இதேபோன்று $S_x \sqrt{1 - r^2}\, \sigma x$ என்றும் நிறுவலாம். இதை x-மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை என்பர்.

8.4-1 துணை முடிவுகள்

(i) $S_y^2 = (1 - r^2)\, \sigma y^2$, $S_x^2 = (1 - r^2)\, \sigma x^2$.

இங்கு S_y^2, S_x^2 என்பன மிகையெண்களாக இருப்பதால், $(1 - r^2)$-ன் மதிப்பும் மிகையாக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $(1 - r^2) \geq 0$; *i.e.*, $r^2 \leq 1$

i.e., $|r| \leq 1$; *i.e.*, $-1 \leq r \leq 1$

இவ்வாறு மதிப்பீட்டின் திட்டப் பிழையின் மூலமும் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லையைக் காணலாம்.

(ii) $r = \pm 1$ எனில், $S_y{}^2 = S_x{}^2 = 0$ என்றாகிறது.

அதாவது, (x_i, y_i) என்ற ஜோடி மதிப்புகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து விலகியுள்ள தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் பூஜ்யத்திற்கு சமம் என்று தெரிகிறது. ஆகையால் இப்புள்ளிகள் எல்லாம் இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளின்மீதும் அமைய வேண்டும். எனவே, இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றாகின்றன. அதாவது x, y என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவு நிறைவு பெற்றது என்று அறிகிறோம். மேலும் அம் மாறிகளுக்கிடையே ஒரு படிச் சார்புத் தொடர்பு இருக்க வேண்டும் என்றும் விளங்குகிறது.

இவ்வாறு, r^2-ன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு எவ்வளவு அருகில் அணுகுகிறதோ, அந்த அளவுக்கு (x_i, y_i) என்ற புள்ளிகள் தொடர்புக் கோடுகளுக்கு அருகே அமையக்கூடும் என்று நன்கு புரிகிறது. அதாவது, x, y-க்கிடையே உள்ள தொடர்பு ஒருபடிச் சார்புத் தொடர்பை எந்த அளவு அணுகும் என்பதை அளக்க r-ன் மதிப்பு பயன்படுகிறது என்று அறிகிறோம்.

மேலும் r-ன் அடையாளம் μ_{11}-ன் அடையாளத்தைச் சார்ந்திருக்கும். ஆகையால், தொடர்புக் கோடுகளின் சாய்வு விகிதங்களின் அடையாளங்களைக் கொண்டு, r-ன் அடையாளத்தை நிர்ணயிக்கக்கூடும். எனவே x-ன் மதிப்போடு y-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது r-ன் மதிப்பு மிகை எண்ணாகவும், மாறாக x-அதிகரிக்கும்போது (குறையும்போது) y-ன் மதிப்பு குறையுமானால் (அதிகரிக்குமானால்) r-ன் மதிப்பு குறை எண்ணாகவும் இருக்கும் என்று விளங்குகிறது.

(iii) $r = 0$ எனில், $S_y{}^2 = \sigma y^2$; $S_x{}^2 = \sigma x^2$ என்று கிடைக்கும்.

அதாவது x, y என்ற மாறிகள் ஒட்டுறவு அற்றவையாக இருப்பின், S_x, S_y என்பன முறையே திட்டவிலக்கங்கள் σx, σy-க்குச் சமமாகும்.

8·5 மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகளின் மூலம் மதிப்பீடு செய்தல்:

x-ன் மீது y-யின் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து கிடைக்கும் y_i எனும் மாறியின் மதிப்பீட்டை Y_i எனக் கொள்வோம்.

ஆகையால், $Y_i = a + b\,x_i$ என்றாகும்.

இயல்நிலை சமன்பாடுகளில் இம்மதிப்பைப் பிரதியிட,

$$\sum_i p_i \cdot (y_i - Y_i) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum_i p_i \cdot (y_i - Y_i) \cdot x_i = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$ என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, $\bar{y} = \bar{Y}$ என்று பெறலாம்.

அதாவது y-ன் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் சராசரி, மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து கிடைக்கும் Y-ன் மதிப்புகளின் சராசரிக்குச் சமம் என்று அறிகிறோம்.

அடுத்து முதல் சமன்பாட்டை a-யினாலும்; இரண்டாவது சமன்பாட்டை b-யினாலும் பெருக்கிக் கூட்ட,

$$\sum_i p_i \cdot Y_i\,(y_i - Y_i) = 0$$ என்று கிடைக்கும். ...... (3)

இப்பொழுது, சமன்பாடுகள் (1), (3)-லிருந்து,

$$\sum_i p_i\,(y_i - Y_i)\quad(Y_i - \bar{y}) = 0$$ என்ற சமன்பாட்டைப் பெறலாம். .. ... (4)

மேலும், $\sigma y^2 = \sum_i p_i\,(y_i - \bar{y})^2$

$$= \sum_i p_i\,[(y_i - Y_i) + (Y_i - \bar{y})]^2$$

$$= \sum_i p_i\,(y_i - Y_i)^2 + \sum_i p_i\,(Y_i - \bar{y})^2$$

$$+ 2 \sum_i p_i\,(y_i - Y_i)\,(Y_j - \bar{y})$$

∴ சமன்பாடு (4)-ஐப் பயன்படுத்த,

$\sigma y^2 = \sum p_i\,(y_i - Y_i)^2 + \sum_i p_i\,(Y_i - \bar{y})^2$ என்றாகும்.

i.e., $\sigma y^2 = S_y{}^2 + \sigma Y^2$.

$$= (1 - r^2)\,\sigma y^2 + \sigma Y^2$$

$$\therefore \quad \sigma Y^2 = r^2 \sigma y^2; \quad i.e., \quad \sigma Y = | r | \sigma y \quad \text{—} \cdots \quad (5)$$

அதாவது, Y-ன் மாறுபாடு, y-ன் மாறுபாட்டைப்போன்று r^2 மடங்குள்ளது என்று நிறுவியுள்ளோம்.

8.5-1 இதேபோன்று y_i எனும் கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்கும், அவற்றின் மதிப்பீடுகளாகிய Y_i-க்கும் இடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழுவின் மதிப்பு $| r |$-க்குச் சமமாக இருக்கும் என்று பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

பொதுக் கூட்டுச் சராசரியாகிய $\bar{y}$-ல் ஆதியை எடுத்துக்கொள்வோமானால், $\bar{y} = 0$ என்ருகும். மேலும், சமன்பாடு (3)-லிருந்து, பின்வரும் முடிவு கிடைக்கும்.

$$\Sigma \; p_i \, y_i \, Y_i = \sum_i p_i \, y_i^2 = \sigma y^2$$

y_i-களுக்கும் Y_i-களுக்கும் இடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழுவின் மதிப்பு

$$= \frac{\sum_i p_i \, y_i \, Y_i}{\sigma y \, \sigma Y} = \frac{\sigma Y^2}{\sigma y \, \sigma Y}$$

$$= \frac{\sigma Y}{\sigma y} = | r | \text{ (முடிவு (5)-லிருந்து)}$$

8.6 தர ஒட்டுறவு (Correlation of Ranks)

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள தனிப்பட்ட மனிதர்களை, அவர்களின் முக்கியத்துவத்தைப் பொறுத்தோ, அல்லது அவர்களின் திறமையினைப் பொறுத்தோ வரிசைப்படுத்திக் கூறலாம். உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் கணிதத்தில் பெற்றுள்ள தேர்ச்சியின் அடிப்படையில் அவர்களைத்தரப்படுத்திக் கூறமுடியும். அல்லது, அவர்களின் இசைத்திறமையை ஒப்பிட்டு அவர்களை வரிசைப் படுத்தலாம். இவ்வாறு மனிதர்களின், அல்லது பொருள்களின் சில சிறப்புப் பண்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, மனிதர்களை அல்லது பொருள்களை தரப்படுத்துவதன்மூலம் அப்பண்புகளுக்கிடையே உள்ள உறவினை அளவிட முடியும்.

இங்கு A, B என்ற இரண்டு பண்புகளையுடைய n வெவ்வேறு பொருள்களை பண்புகளின் தரத்திற்கு ஏற்ப தனித்தனியாக வரிசைப்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். மேலும், ஒரே பொருளுக்கு இரண்டு பண்புகளிலும் இருவேறு வரிசை எண்கள்

இருப்பதாகக் கருதுவோம் இந்த இரண்டு பண்புகளுக்கும் ஏற்ப i-ஆவது பொருளின் தரங்களை (வரிசை எண்களை) முறையே x_i, y_i என எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு x_i, y_i என்ற மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் 1, 2, 3, ……… n என்ற முழு எண்களை வெவ்வேறு விதமாக அடையக்கூடும். ஆகையால்,

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{2}(n+1) \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

மேலும் $\sigma x^2 = \sigma y^2$

$$= \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{n+1}{12}\right)[2(2n+1) - 3(n+1)]$$

$$= \frac{(n+1)}{12}(n-1) = \left(\frac{n^2-1}{12}\right)$$

x, y என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவையே, AB என்ற பண்புகளுக்கிடையே உள்ள "தர ஒட்டுறவுக் கெழு" என்று கூறப்படும்.

$$\therefore \text{ தர ஒட்டுறவுக்கெழு, } r = \frac{\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma x \, \sigma y}$$

இதன் மதிப்பைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

x_i, y_i-க்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்தை d_i என்க.

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_i (x_i - y_i)^2$$

$$= \sum_i [(x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})]^2 \quad (\because \bar{x} = \bar{y})$$

$$= \sum_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum_i (y_i - \bar{y})^2 - 2\sum_i (x_i -)(y_i - \bar{y})\bar{x}$$

$$= n \cdot \sigma x^2 + n \cdot \sigma y^2 - 2 \cdot n \cdot r \sigma x \cdot \sigma y$$

$$= n \left[\left(\frac{n^2 - 1}{12} \right) + \left(\frac{n^2 - 1}{12} \right) \quad 2 \cdot r \left(\frac{n^2 - 1}{12} \right) \right]$$

$$i.e., \frac{1}{n} \sum_i d_i^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{6} \right) - r \left(\frac{n^2 - 1}{6} \right) = (1 - r) \left(\frac{n^2 - 1}{6} \right)$$

$$\therefore \quad 1 - r = \frac{6 \sum_i d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$i.e., \quad r = \left[1 - \frac{6 \sum_i di^2}{n(n^2 - 1)} \right]$$

இதுதான் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடப் பயன்படும் வாய்பாடாகும்.

குறிப்பு : (*i*) தர ஒட்டுறவு நிறைவானதாயின் வித்தியாசங்கள் *di* ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யமாக இருக்கும். ஆகையால், $r=1$ என்று கிடைக்கும்.

(*ii*) *A* எனும் பண்புக்கான வரிசை எண்களும் (தரங்களும்), *B* எனும் பண்புக்கான வரிசை எண்களும் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் வரிசையில் இருக்குமானால்,

$x_i + y_i = n + 1$ என்று பெறலாம்.

இந்நிலையில், எல்லா புள்ளிகளும் குறை சாய்வு விகிதத்தை உடைய ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அமையும் என்று விளங்கும்.

இங்கு $r = -1$ என்று கிடைப்பதால், x, y என்ற மாறிகளுக் கிடையே நிறைவான நேர்மாறு ஒட்டுறவு இருக்கும் என்று அறியலாம்.

8.7 ஒட்டுறவு விகிதம் (Correlation Ratio)

x என்ற மாறி ஏற்கக்கூடிய x_i எனும் ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு ஒப்ப y என்ற மாறிக்கு y_i எனும் ஒரே ஒரு மதிப்புதான் உளது என்ற அடிப்படையில் மேலே கண்ட

விளக்கங்கள் வரையறுக்கப்பட்டன. ஆனால் பொதுவாக y-க்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மதிப்புகள் இருக்கக்கூடும். இவ்வாறு x-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்பாகிய x_i-க்கு ஒப்ப அமையும் y-ன் மதிப்புகளை y_{ij} என்று குறிப்பிடுவோம். மேலும் (x_i, y_{ij}) என்ற ஜோடி மதிப்புகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை p_{ij} என்று கொள்வோம்.

இங்கு i, j என்பன ஏற்கும் முழு எண் மதிப்புகளுக்கு ஒப்ப,

$$\sum_j p_{ij} = n_i \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad \sum_i \sum_j P_{ij} = \sum_i n_i = 1 \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

$$\text{இப்பொழுது,} \quad \bar{y}_i = \frac{\sum_j P_{ij} \cdot y_{ij}}{\sum_j P_{ij}} = \frac{\sum_j P_{ij}\, y_{ij}}{n_i}$$

$$111^{rly}\ \bar{y} = \frac{\sum_i \sum_j P_{ij} \cdot y_{ij}}{\sum_i \sum_j P_{ij}} = \frac{\sum_i n_i \bar{y}_i}{\sum_i n_i}$$

$$= \sum_i n_i\, \bar{y}_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \sum_j P_{ij}\, x_i}{\sum_i \sum_j P_{ij}} = \sum_i n_i\, x_i$$

இங்கு (x, y) ஏற்கும் வெவ்வேறு மதிப்புகளை முறையாக வரிசைப்படுத்துவோம். ஆகையால், x-ன் மதிப்பு x_i என்றிருக்கும் போது, y என்ற மாறி ஏற்கும் எல்லா மதிப்புகளும் அடங்கியுள்ள i-ஆவது வரிசையின் சராசரி $\bar{y}_i$ என்றும்,

இவ்வாறுள்ள வெவ்வேறு வரிசைகளின் சராசரிகள் நிறையிட்ட பொதுச் சராசரி $\bar{y}$ என்றும் அறியலாம்.

மேலும் x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாட்டை

$y = a + bx$ என்க

எனவே, a, b என்ற மாறிலிகளின் மதிப்பைக் கணக்கிட

$$S = \sum_i \sum_j P_{ij} (y_{ij} - a - b\, x_i)^2 \text{ என்ற}$$

விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியின் மதிப்பு மீச்சிறிதாக இருக்கும் எனக் கொள்ள வேண்டும். இந்நிபந்தனைக்குட்பட்டு கிடைக்கப்பெறும் இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளாவன.

$$\sum_i \sum_j P_{ij} (y_{ij} - a - b\, x_i) = 0$$

$$\sum_i \sum_j P_{ij}\, x_i\, (y_{ij} - a - bx_i) = 0$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண, a, b-ன் மதிப்புகள் கிடைக்கும். இவற்றிலிருந்து மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - \bar{y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2} (x - \bar{x}) \text{ என்று அமையும்.}$$

இங்கு,

$$\mu_{11} = \sum_i \sum_j P_{ij} (y_{ij} - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

$$= \sum_i n_i (\bar{y}_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

$$\sigma x^2 = \sum_i \sum_j P_{ij} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$111^{rly}\ \sigma y^2 = \sum_i \sum_j P_{ij}\,(y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_i n_i\ (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

என்றிருக்கும்.

இதே முறையில், x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து (x_i, y_{ij}) என்ற பல்வேறு புள்ளிகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி

$S_y^2 = \sigma y^2\,(1 - r^2)$ என்று நிறுவலாம்.

மேலும் வரிசை சராசரிகளிலிருந்து y மதிப்புகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியை $S_y'^2$ என்று குறிப்பிடுவோமானல்,

$$S_y'^2 = \sum_i \sum_j P_{ij}\,(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$ என்று பெறக்கூடும்.

பின், $\eta^2_{yx} = \left(1 = \dfrac{S_y'^2}{\sigma y^2}\right)$ என்று வரையறுப்போமானல், η_{yx}-ஐ x-ன் மீது y-ன் "ஒட்டுறவு விகிதம்" என்று அழைப்பதுண்டு.

இத்தொடர்பிலிருந்து, $S_y'^2 = \sigma y^2\,(1 - \eta_{yx}^2)$ என்று கிடைக்கும். இங்கு $S_y'^2$-ன் மதிப்பு எப்பொழுதுமே மிகையாதலின், $0 \leq \eta^2_{yx} \leq 1$ என்றிருத்தல் வேண்டும். மேலும் எந்த வரிசையிலும் சராசரியிலிருந்து அளக்கப்படும் விலக்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறிதாக இருக்குமாகையால்,

$S_y'^2 \leq S_y^2$ என்றிருக்க வேண்டும்.

இதிலிருந்து, $1 \geq \eta^2_{yx} \geq r^2$ என்று பெறப்படும்.

குறிப்பு: (i) x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்பு ஒரு படித்தானதாயின், வரிசைச் சராசரிகள் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டின் மீது இருக்க வேண்டும். ஆகையால்

$\eta^2_{yx} = r^2$ என்று கிடைக்கும்.

இவ்வாறு, மாறிகளின் தொடர்பு ஒரு படித்தன்மையிலிருந்து விலகியிருத்தலை

$(\eta^2_{yz} - r^2)$-ன் பூஜ்யமல்லாத மதிப்புடன் தொடர்பு படுத்தக் கூடும்.

(*ii*) η^2_{yx}-ன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு எவ்வளவு அருகில் உள்ளதோ, அந்த அளவுக்கு $S_y'^2$-ன் மதிப்பு சிறியதாக அமையும். ஆகையால் x, y மதிப்புகளுக்கு ஒப்பான புள்ளிகள், வரிசை சராசரிகளின் வளைவரைக்கு மிக நெருக்கமாக இருக்க வேண்டும். மேலும் $\eta_{yx} = 1$ எனில், $S_y'^2 = 0$ என்றாகும். எனவே அப்புள்ளிகள் சராசரிகளின் வளைவரை மீதே அமைந்திருக்கும். இந்நிலையில் x, y-க்கு இடையே சார்புடை உறவு இருத்தல் வேண்டும். இவ்வாறு, $y = F(x)$ என்ற அமைப்பில் உள்ள ஒரு சார்புடை உறவை நோக்கி, x, y என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு எந்த அளவுக்கு அணுகும் என்பதை அளவிட η_{yx} என்ற விகிதம் பயன்படுகிறது.

8·7-1. தேற்றம் : ஒட்டுறவு விகிதத்தின் மதிப்பு, வரிசைகளில் உள்ள y-ன் நிறையிட்ட சராசரிகளின் திட்டவிலக்கத்திற்கும், பரவலின் எல்லா y மதிப்புகளின் திட்டவிலக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதத்திற்குச் சமம். (இங்கு ஒவ்வொரு சராசரியும், அவ்வரிசையின் நிகழ்தகவுடன் நிறையிடப்படும் என்க.)

நிரூபணம் :

குத்து வரிசைகளின் சராசரிகளின் திட்டவிலக்கத்தை σmy என்று கொள்வோமானால்,

$$\sigma^2 my = \sum_i n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

ஆனால், $$\sigma y^2 = \sum_i \sum_j p_{ij} (y_{ij} - \bar{y})^2$$

$$= \sum_i \sum_j p_{ij} [(y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y})]^2$$

$$= \sum_i \sum_j p_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_i \sum_j p_{ij} (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

$$+ 2 \sum_i \sum_j p_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y})$$

வலதுபுறக் கோவைகளுள், $\sum_i \sum_j p_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y}) = 0$ என்று தெரியும்.

$$\therefore \quad \sigma^2 y = S_y'^2 + \sigma^2 my \text{ என்று தெரிய வருகிறது.}$$

ஆனால், $S_y'^2 = \sigma^2 y \cdot (1 - \eta^2{}_{yx})$

எனவே, $\sigma^2 y = \sigma^2 y \ (1 - \eta^2{}_{yx}) + \sigma^2 my$

$$i.e., \quad \eta^2{}_{yx} = \frac{\sigma^2 my}{\sigma^2 y}; \quad i.e., \quad \eta_{yx} = \frac{\sigma my}{\sigma y}$$

8·7-2. இதுகாறும் குத்து வரிசைகளைத் தனித்தனியாக எடுத்துக் கொண்டு x-ன் மீது y-ன் "ஒட்டுறவு விகிதத்தை" வரையறுத்தோம். இதேபோன்று கிடை வரிசைகளை எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் y-ன் மீது x-ன் ஒட்டுறவு விகிதத்தை வரையறுக்கலாம்.

இவ்வாறு, η_{xy} என்பது y-ன் மீது x-ன் ஒட்டுறவு விகிதம் என்றால்,

$$\eta^2{}_{xy} = 1 - \frac{S^{2\prime}{}_x}{\sigma^2 x} \text{ என்றும்,}$$

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma mx}{\sigma x} \text{ என்றும்,}$$

$1 \geq \eta^2{}_{xy} \geq r^2$ என்றும் நிறுவ முடியும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் :

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y-ன் மதிப்புகள், 10 மாணவர்கள் இரண்டு பாடங்களில் நடைபெற்ற தேர்வுகளில் அடைந்த மதிப்பெண்களாகும். x, y எனும் மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழுவை கணக்கிடு.

x : 92, 89, 87, 86, 83, 77, 71, 63, 53, 50.

y : 86, 83, 91, 77, 68, 85, 52, 82, 37, 57.

ஒட்டுறவுக்கெழுவின் மதிப்பு எடுத்துக்கொள்ளப்படும் ஆதியையோ அல்லது அளக்கப் பயன்படும் அலகையோ சார்ந்திருக்காது என்று கண்டோம். ஆகையால், x என்ற மாறிக்கு $A = 83$-ஐ ஆதியாகவும், y-க்கு $B = 77$-ஐ ஆதியாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம். மேலும் இங்கு $n = 10$ என்றுள்ளது.

ஒட்டுறவுக்கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடத் தேவையான விவரங்களை பின்வருமாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

x	y	$u = x - A$	$v = y - B$	u^2	v^2	uv
92	86	9	9	81	81	81
89	83	6	6	36	36	36
87	91	4	14	16	196	56
86	77	3	0	9	0	0
83	68	0	—9	0	81	0
77	85	—6	8	36	16	—48
71	52	—12	—25	144	625	300
63	82	—20	5	400	25	—100
53	37	—30	—40	900	1600	1200
50	57	—33	—20	1089	400	660
—	கூடுதல்	—79	—52	2711	3108	2185

$$\therefore \text{Var}(x) = \sigma x^2 = \frac{\Sigma u^2}{n} - \left(\frac{\Sigma u}{n}\right)^2$$

$$= \frac{2711}{10} - \left(\frac{-79}{10}\right)^2$$

$$= 208 \cdot 69$$

i.e., $\sigma x = 14{\cdot}4$, தோராயமாக.

$$\text{111}^{rly}\ \text{Var}(y) = \sigma y^2 = \frac{\Sigma v^2}{n} - \left(\frac{\Sigma v}{n}\right)^2$$

$$= \frac{3108}{10} - \left(\frac{-52}{10}\right)^2$$

$$= 283{\cdot}76$$

$\therefore \quad \sigma y = 16{\cdot}8$, தோராயமாக.

மேலும் $\frac{\Sigma uv}{n} - \frac{\Sigma u}{n} \cdot \frac{\Sigma v}{n}$

$$= \frac{2185}{10} - \left(\frac{-79}{10}\right)\left(\frac{-52}{10}\right)$$

$$= \frac{17742}{100}$$

$$\therefore \text{ ஒட்டுறவுக்கெழு; } r = \frac{\frac{\Sigma uv}{n} - \left(\frac{\Sigma u}{n}\right)\left(\frac{\Sigma v}{n}\right)}{\sigma x \cdot \sigma y}$$

$$= \frac{17742}{100 \times 14{\cdot}4 \times 16{\cdot}8} = 0{\cdot}73$$

தோராயமாக.

2. பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y என்ற மாறிகளுக்கான அலைவெண்களிலிருந்து, x, y-க் கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவையும், மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளையும் கண்டுபிடி.

y \ x	30—34	35—39	40—44	45—49	50—54	55—59	கூடுதல்
80—89	2	3	2				7
90—99		2	5	4	2		13
100—109		4	8	5	1		18
110—119			2	3	1	1	7
120—129	1			2	1	1	5
கூடுதல்	3	9	17	14	5	2	50

x, y எனும் மாறிகளின் பிரிவு இடைவெளிக்குப்பதிலாக, அந்தந்த இடைவெளிகளின் நடுமதிப்புகளை எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது பிரிவு இடைவெளிகளின் நடுமதிப்புகளையே x, y-ன் மதிப்புகளாகக் கொள்கிறோம். மேலும் x என்ற மாறிக்கு $A = 42$ எனும் மதிப்பையும், y என்ற மாறிக்கு $B = 105$ எனும் மதிப்பையும் ஆதியாகக் கொள்வோம்.

அடுத்து x, y என்ற மாறிகளுக்குப் பதிலாக, u, v எனும் புதிய மாறிகளைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

$$u = \frac{x - 42}{5}, \quad v = \frac{y - 105}{10}.$$

இப்புதிய மாறிகளுக்கான அலைவெண்களை, ஒட்டுறவுக் கெழுவை எளிதாக கணக்கிடுவதற்கு வசதியாகப் பின்வரும் அட்டவணையி லுள்ளவாறு அமைப்போம்.

	x	32	37	42	47	52	57			
y	v \ u	−2	−1	0	1	2	3	f_y	$f_y \cdot v$	$f_y \cdot v^2$
85	−2	2 (8)	3 (6)	2 (0)				7	−14	28
95	−1		2 (2)	5 (0)	4 (−4)	2 (−4)		13	−13	13
105	0		4 (0)	8 (0)	5 (0)	1 (0)		18	0	0
115	1			2 (0)	3 (3)	1 (2)	1 (3)	7	7	7

125	2	1 / ⎸—4			2 ⎸4	1 ⎸4	1 ⎸6	5	10	20
	f_x	3	9	17	14	5	2	$\Sigma f_x = \Sigma f_y = 50$	$\Sigma f_y \cdot v = -10$	$\Sigma f_y \cdot v^2 = 68$
	$f_x \cdot u$	−6	−9	0	14	10	6	$\Sigma f_x \cdot u = 15$		
	$f_x \cdot u^2$	12	9	0	14	20	18	$\Sigma f_x u^2 = 73$		
	$f_{xy} \cdot uv$	4	8	0	3	2	9	$\Sigma f_{xy} uv = 26$		

$$\therefore \quad \sigma x^2 = \frac{\Sigma f_x u^2}{N} - \left[\frac{\Sigma f_x \cdot u}{N}\right]^2$$

$$= \frac{73}{50} - \left(\frac{15}{50}\right)^2 = 1 \cdot 37$$

i.e, $\sigma x = 1 \cdot 16$

$$111^{rly} \; \sigma y^2 = \frac{68}{50} - \left(\frac{-10}{50}\right)^2 = 1 \cdot 32$$

i.e., $\sigma y = 1 \cdot 15$

இப்பொழுது, $r = \dfrac{\frac{1}{N} \Sigma f_{xy} uv - \left(\frac{1}{N} \Sigma fx \cdot u\right) \cdot \left(\frac{1}{N} \Sigma f_y \cdot v\right)}{\sigma x \cdot \sigma y}$

$$= \frac{\frac{26}{50} - \left(\frac{15}{50}\right) \cdot \left(\frac{-10}{50}\right)}{1 \cdot 15 \times 1 \cdot 15} = \frac{0 \cdot 58}{1 \cdot 344} = 0 \cdot 43$$

i.e., ஒட்டுறவுக்கெழு $= 0 \cdot 43$

x-ன் கூட்டுச்சராசரி, $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fx \cdot u}{N} \times 5$

$$= 42 + \left(\frac{15}{50}\right) \times 5 = 4 \cdot 35$$

y-ன் கூட்டுச்சராசரி, $\bar{y} = B + \dfrac{\Sigma fy \cdot v}{N} \times 10$

$$= 105 + \left(\frac{-10}{50}\right) \times 10 = 103$$

எனவே x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு,

$$(y - 103) = \left(\frac{0 \cdot 43 \times 1 \cdot 15 \times 10}{1 \cdot 16 \times 5}\right) \cdot (x - 43 \cdot 5)$$

என்று கிடைக்கும்.

i.e., $1.16\,(y-103) = 0.989\,(x-43.5)$

111^{rly} y-ன் மீது x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடு.

$$(x-43.5) = \left(\frac{0.43 \times 1.16 \times 5}{1.15 \times 10}\right)\cdot(y-103)$$

என்பதாம்.

i.e., $2.3\;(x-43.5) = 0.499\,(y-103)$

3. ஒரு அழகுப்போட்டியில் பத்து பெண்கள் கலந்து கொண்டனர். அவர்களின் அழகிற்கு ஏற்ப, இரண்டு நீதிபதிகளை வரிசைப்படுத்திய முறை பின்வருமாறு.

x	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
y	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

அவ் வரிசைகளுக்கிடையே உள்ள தர ஒட்டுறவைக் காண்க.

இங்கு $\Sigma\,(x-y)^2 = (-5)^2 + (2)^2 + (-4)^2 + (2)^2$

$$+ (2)^2 + 0 + (1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (1)^2$$

i.e., $\Sigma\, d^2 = 60$

$\therefore$ தர ஒட்டுறவு $= 1 - \dfrac{6\,\Sigma\, d^2}{n\,(n^2-1)}$

$$= 1 - \frac{6 \times 60}{10 \times 99} = 0.63$$

4. x_1, x_2, x_3 என்பன ஒட்டுறவில்லா மூன்று புள்ளியியல் மாறிகள், அவற்றின் பொது திட்ட விலக்கம் σ என்றால், (x_1+x_2) (x_2+x_3) என்ற மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழுவின் மதிப்பு, $\frac{1}{2}$ என்று நிரூபி.

$u = x_1 + x_2, \qquad v = x_2 + x_3$ என்க:

$\therefore\; \bar{u} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \qquad \bar{v} = \bar{x}_2 + \bar{x}_3$

இப்பொழுது $u - \bar{u} = (x_1 - \bar{x}_1) + (x_2 - \bar{x}_2)$

$$v - \bar{v} = (x_2 - \bar{x}_2) + (x_3 - \bar{x}_3)$$

மேலும் $x_1 - \bar{x}_1 = y_1$, $x_2 - \bar{x}_2 = y_2$, $x_3 - \bar{x}_3 = y_3$ என்க.

$\therefore$ $u\ v$ என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு,

$$r = \frac{\Sigma (u - \bar{u})(v - \bar{v})}{\sqrt{\Sigma (u - \bar{u})^2 \ \Sigma (v - \bar{v})^2}}$$

$$= \frac{\Sigma (y_1 + y_2)(y_2 + y_3)}{\sqrt{\Sigma (y_1 + y_2)^2 \cdot \Sigma (y_2 + y_3)^2}}$$

ஆனால் x_1, x_2 ஒட்டுறவில்லா மாறிகள் என்று கொடுக்கப் பட்டிருப்பதால்,

$$\Sigma (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) = 0$$

$$i.e., \ \Sigma y_1, y_2 = 0$$

$$111^{ly} \quad \Sigma y_2, y_3 = 0 = \Sigma y_3 y_1$$

$$\therefore \quad r = \frac{\Sigma (y_2)^2}{\sqrt{\Sigma (y_1^2 + y_2^2) \cdot \Sigma (y_2^2 + y_3^2)}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{(\sigma^2 + \sigma^2) \cdot (\sigma^2 + \sigma^2)}}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{4\sigma 4}} = \frac{1}{2}$$

5. ஒரு மாதிரிக் கூறில் கிடைத்த புள்ளி விவரங்களிலிருந்து, 12 தந்தைகளின் உயரங்களும், அவர்களின் மூத்த மகன்களின் உயரங்களும் பின்வருமாறு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. அவர்களின் உயரங்களுக்கிடையேயான தர ஒட்டுறவைக் கண்டு பிடி.

தந்தையின் உயரம் (அங்குலத்தில்)	63	67	70	65	64	68	62	66	71	69	67	68
மகனின் உயரம் (அங்குலத்தில்)	66	68	68	68	65	69	66	65	70	68	67	71

தந்தைகளின் உயரங்களை வரிசைப்படுத்தி எழுதுவோமானால் 62, 63, 64, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 70, 71 என்று கிடைக்கும். இங்கு 6-ஆவது, 7-ஆவது இடங்களில் ஒரே அளவு

உயரங்கள் உள்ளன. ஆகையால் அவ்வரிசை எண்களின் கூட்டுச் சராசரி எண்ணுகிய 6·5-ஐ அந்த இடங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் வரிசை எண்ணுகக் கொடுக்கலாம். இதே போன்று 8-ஆவது, 9-ஆவது இடங்களுக்கான வரிசை எண் களாக 8·5-ஐக் கொடுக்கலாம்

அடுத்து, மகன்களின் உயரங்களை வரிசைப்படுத்த,

65, 65 66, 66, 67. 68, 68, 68, 68. 69. 70, 71 என்ருகும். இங்கு முதல் இரண்டு இடங்களிலும் சம மதிப்புகள் இருப்பதால், அவற்றின் வரிசை எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் 1·5 என்றும்; இதேபோன்று 3, 4-ஆம் இடங்களுக்கான வரிசை எண்களை 3·5 என்றும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்,

மேலும் 6, 7, 8, 9, ஆகிய நான்கு இடங்களிலும் சம மதிப்புகள் இருப்பதால், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி 7·5-ஐ அந்த நான்கு இடங்களின் வரிசை எண்களாகக் கொள்ளலாம்.

இவ்வாறு தந்தை—மகன் உயரங்களின் தர இலக்கங்கள் வருமாறு:

x = தந்தையின் தர இலக்கம்	2	6·5	11	4	3	8·5
y = மகனின் தர இலக்கம்	3 5	7.5	7·5	7·5	1·5	10
$d = x - y$	—1·5	—1	3·5	—3·5	1·5	—1·5
d^2	2·25	1	12 25	12·25	2·25	2·25

x = தந்தையின் தர இலக்கம்	1	5	12	10	6·5	8·5
y = மகனின் தர இலக்கம்	3·5	1·5	11	7·5	5	12
$d = x - y$	—2·5	3·5	1	2·5	1·5	—3·5
d^2	6 25	12·25	1	6·25	2·25	12·25

ஆகையால் தர ஒட்டுறவு, $r = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 72.5}{12 \times 143} = 0{\cdot}7465$

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் கொண்டு, x, y என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவையும், y-ன் மீது x-ன் ஒட்டுறவு விகிதத்தையும் கணக்கிடு.

y \ x	10	15	20	25	f_y
7	3	2			5
9		1	4	6	11
11		3	4	2	9
13	2	1	5		8
15		6	1		7
f_x	5	13	14	8	40

v \ u	-2	-1	0	1	f_y	$v \cdot f_y$	$v^2 \cdot f_y$	$uv \cdot f_{xy}$
-2	3	2			5	-10	20	16
-1		1	4	6	11	-11	11	-5
0		3	4	2	9	0	0	0
1	2	1	5		8	8	8	-5
2		6	1		7	14	28	-12
f_x	5	13	14	8	$\Sigma f_y = 40 = \Sigma f_x$	$\Sigma v \cdot f_y = 1$	$\Sigma v^2 f_y = 67$	$\Sigma uv f_{xy} = -6$
$u \cdot f_x$	-10	-13	0	8	$\Sigma u f_x = -15$			
$u^2 \cdot f_x$	20	13	0	8	$\Sigma u^2 f_x = 41$			

பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x எனும் மாறிக்கு $A = 20$-ஐ ஆதியாகவும், y என்ற மாறிக்கு $B = 11$-ஐ ஆதியாகவும் கொள்வோம். மேலும்

$u = \frac{x - 20}{5}$, $v = \frac{y - 11}{2}$ என்றிருக்குமாறு, u, v என்ற புதிய மாறிகளை x, y-க்குப் பதிலாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுவதற்கு வசதியாக பின் வரும் அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

x-ன் திட்டவிலக்கம் σx எனில், பின்

$$\sigma x^2 = \frac{\Sigma x^2 \cdot f_x}{\Sigma f_x} - \left(\frac{\Sigma x f_x}{\Sigma f_x}\right)^2$$

$$= \left[\frac{41}{40} - \left(\frac{-15}{40}\right)^2\right] \times 5^2$$

$$= 0{\cdot}884$$

$$\therefore \quad \sigma x = 0{\cdot}94$$

$$\text{111}^{rly} \quad \sigma y^2 = \frac{\Sigma y^2 \cdot f_y}{\Sigma f_y} - \left(\frac{\Sigma y f_y}{\Sigma f_y}\right)^2$$

$$= \left[\frac{67}{40} - \left(\frac{1}{40}\right)^2\right] + 2^2$$

$$= 1{\cdot}67$$

$$\therefore \quad \sigma y = 1{\cdot}28$$

இப்பொழுது, $$r = \frac{\frac{\Sigma xy f_{xy}}{N} - \frac{\Sigma x f_x}{N} \cdot \frac{\Sigma y \cdot f_y}{N}}{\sigma x \quad \sigma y}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{-6}{40}\right) - \left(\frac{-15}{40}\right)\left(\frac{1}{40}\right)\right] \times 5 \times 2}{0{\cdot}94 \times 1{\cdot}28}$$

$$= -0{\cdot}12$$

y-ன் மீது x-ன் ஒட்டுறவு விகிதத்தைக் கணக்கிடக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

இங்கு வரிசைகளின் நிறையிட்ட சராசரி, d என்பது ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள அலைவெண்களை அவற்றின்

x மதிப்புகளால் பெருக்கிக் கூட்டக் கிடைக்கும் மதிப்பை மொத்த அலைவெண்ணால் வகுத்துவரும் மதிப்பாகும். உதாரணமாக, முதல் வரிசைக்கு ஒப்பான d-ன் மதிப்பு

வரிசைகளின் அலைவெண்கள் (f)	வரிசைகளின் நிறையிட்ட சராசரிகள் (d)	$f \cdot d$	$f \cdot d^2$
5	$\frac{60}{5} = 12$	60	720·0
11	$\frac{245}{11} = 22.3$	245	5463·5
9	$\frac{175}{9} = 19.4$	175	3395·0
8	$\frac{135}{8} = 16.9$	135	2281·5
7	$\frac{110}{7} = 15.7$	110	1727·0
	கூடுதல்	725	13587

$$= \frac{10 \times 3 + 15 \times 2}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\therefore \quad \sigma^2 mx = \frac{\Sigma f \cdot d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f d}{N}\right)^2$$

$$= \frac{13587}{40} - \left(\frac{725}{40}\right)^2$$

$$= 11.16$$

$$i.e., \quad \sigma mx = 3.34$$

எனவே y-ன் மீது x-ன் ஒட்டுறவு விகிதம் $\Big\}$ $\eta_{xy} = \frac{\sigma mx}{\sigma x}$

$$= \frac{3.34}{0.94 \times 5} = 0.7$$

இதேபோன்று x ன் மீது y-ன் ஒட்டுறவு விகிதம், $\eta_{yx} = 0{\cdot}37$ என்று நிறுவலாம்.

7. x, y எனும் புள்ளியியல் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகள் முறையே $3x + 2y = 26$, $6x + y = 31$ என்ருல், அம்மாறிகளின் கூட்டுச்சராசரி மதிப்புகளேயும், அவைகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் கணக்கிடு

x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு

$$3x + 2y = 26,$$

$$i.e., \quad y = -\frac{3}{2}\cdot x + 13 \text{ என்பதாகும்.}$$

$\therefore$ x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு, $b_{yx} = -\frac{3}{2}$

111^{rly} y-ன் மீது x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு

$$x = -\frac{1}{6}y + \frac{31}{6} \text{ என்பதாகும்.}$$

$\therefore$ y-ன் மீது x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு, $b_{xy} = -\frac{1}{6}$

இம்மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு r எனில், பின், $r^2 = b_{yx}\, b_{xy}$ என்று தெரியும்.

$$\therefore \quad r^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{1}{4}$$

$$i.e., \; r = \pm\,\frac{1}{2}$$

ஆனல் மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்கள் இரண்டும் குறை எண்களாயிருப்பதால், r-ன் மதிப்பு $\left(\frac{-1}{2}\right)$ என்று கொள்ள வேண்டும்.

மேலும் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$3x + 2y = 26$$
$$6x + y = 31 \text{ என்று உள்ளன.}$$

இவ்விரு கோடுகளும் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் என்று தெரியும்.

$$\therefore \quad 3\bar{x} + 2\bar{y} = 26$$
$$6\bar{x} + \bar{y} = 31$$

இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண,

x-ன் கூட்டுச்சராசரி, $\bar{x} = 4$ என்றும்,

y-ன் கூட்டுச்சராசரி, $y = 7$ என்றும் கிடைக்கும்.

பயிற்சி 7

1. ஒரு மாதிரி அளவுக் கணக்கெடுப்பின்போது கிடைத்த விவரங்களிலிருந்து பின்வரும் அட்டவணையைத் தயாரித்துள்ளனர். அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கணவன்-மனைவிக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவைக் கணக்கிடு.

கணவனின் வயது	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
மனைவியின் வயது	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

[விடை : 0·82

2. 66 கிராமங்களில் உள்ள பயிரிடத் தகுந்த மொத்த நிலப் பரப்பில் கரும்பு பயிரிடப்பட்டுள்ள நிலப்பகுதியின் விவரம் வருமாறு.

	பயிரிடத்தகுந்த மொத்தப் பரப்பு (ஏக்கரில்)					
கரும்பு பயிரிடப் பட்டுள்ள பரப்பு	0—500	500—1000	1000—1500	1500—2000	2000—2500	மொத்தம்
0—200	12	6	—	—	—	18
200—400	2	18	4	2	1	27
400—600	—	4	7	3	—	14
600—800	—	1	—	2	1	4
800—1000	—	—	—	1	2	3

பயிரிடத்தகுந்த மொத்த நிலப்பரப்பிற்கும், கரும்பு பயிரிடப் பட்டுள்ள நிலப்பரப்பிற்கும் இடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு என்ன? [விடை : 0·749]

3. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவையும், மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகளையும் கண்டுபிடி.

										மொத்தம்
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
y	9	8	10	12	11	13	14	16	15	100

[விடை : $r = 0{\cdot}95$

$y - 12 = 0{\cdot}95\ (x - 5)$

$x - 5 = 0{\cdot}95\ (y - 12)$]

4. ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களுள் பத்துப்பேர் கணிதத்திலும், புள்ளியியலிலும் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அடிப் படையில் அவர்களின் வரிசை இலக்கங்கள் வருமாறு:

கணிதம்	8	3	9	2	7	10	4	6	1	5
புள்ளியியல்	9	5	10	1	8	7	3	4	2	6

இவற்றிற்கிடையேயான தர ஒட்டுறவு என்ன? [விடை 0·85]

5. உயரத்திற்கும், எடைக்கும் உள்ள தொடர்பை அறிவதற்காக ஒரு கூறு அளவெடுப்பு நடத்தப்பட்டது. அதில் கிடைத்த 300 ஆடவர்களின் உயரங்களும், எடைகளும் பின் வருமாறு:

உயரம் (அங்குலத்தில்)

(எடை பவுண்டில்)

y \ x	59–62	63–66	67–70	71–74	75–78
90–109	2	1			
110–129	7	8	4	2	
130–149	5	15	22	7	1
150–169	2	12	63	19	5
170–189		7	28	32	12
190–209		2	10	20	7
210–229			1	4	2

உயரங்களுக்கும் எடைகளுக்குமிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு என்ன?

மேலும் 72 அங்குல உயரமுள்ள ஒருவரின் எடையை தோராயமாகக் கண்டுபிடி. [விடை: (*i*) 0·54 (*ii*) 173·4 பவு.]

6. 35 வயதுக்கு மேற்பட்ட 12 பெண்களின் ரத்த அழுத்தத்தைப் பரிசோதித்துப் பார்த்ததில் கிடைத்த விவரம் வருமாறு:

வயது (x)	56	52	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
ரத்த அழுத்தம் y	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

x-ன் மீது y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. 45 வயதுள்ள ஒரு பெண்ணின் ரத்த அழுத்தும் எவ்வளவு இருக்கக் கூடும்?

[(i) $y = 80{\cdot}78 + 1{\cdot}138\, x$ (ii) 132]

7. x, y என்பன, $ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டால் தொடர்பு படுத்தப்பட்டுள்ள இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளாகும். a, b என்ற மாறிலிகள் ஒரே அடையாளம் உடையவை என்றால், x-y-க்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு (—1) என்றும், அம் மாறிலிகள் அடையாளத்தில் மாறுபட்டிருந்தால், ஒட்டுறவுக்கெழு (1) என்றும் நிறுவுக.

8. ஒரு பகுதி தீயினால் சேதமடைந்த பரிசோதனைக் கூடத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தாள் ஒன்றில் கீழ் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் மட்டும் தெளிவாகத் தெரிந்தன.

x-ன் மாறுபாடு $= 9$

தொடர்புக் கோடுகள்: $8x - 10y + 66 = 0$; $40x - 18y = 214$ x, y என்ற மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளையும், y-ன் திட்ட விலக்கத்தையும், x — y-க் கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு கெழுவையும் கணக்கிடு.

[விடை: (i) $\bar{x} = 13$, $\bar{y} = 17$ (ii) $\sigma y = 4$ (iii) $r = 0{\cdot}6$]

9. இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகள் x, y-ன் கூட்டுச் சராசரிகள் ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யமாகவும், திட்டவிலக்கங்கள் σ-க்குச் சமமாகவும் இருந்தால்,

$u = (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$, $v = (x \sin \alpha - y \cos \alpha)$ என்ற மாறிகளின் மாறுபாடுகள் ஒவ்வொன்றும் σ^2 என்றும், ஒட்டுறவுக் கெழு பூஜ்யம் என்றும் நிரூபி.

10. x, y என்ற இரண்டு மாறிகளின் திட்ட விலக்கங்கள் σx, σy என்றும் ஒட்டுறவுக்கெழு r என்றும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. $(x + \lambda y)$, $\left(x + \frac{\sigma x}{\sigma y}\, y\right)$ என்ற மாறிகள் ஒட்டுறவு அற்றவையாக இருக்க வேண்டுமானால், λ-ன் மதிப்பு $\left(-\frac{\sigma x}{\sigma y}\right)$ என்று காட்டு.

11. இரண்டு சார்பிலா மாறிகள் x, y-ன் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 5, 10; மாறுபாடுகள் முறையே, 4, 9 என்று இருந்தால், $u = 3x + 4y$, $v = 3x - y$ என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு பூஜ்யமாக இருக்கும் என நிறுவு.

12. r என்பது x, y எனும் இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு என்றும், $u = ax + by$ என்பது வேறு ஒரு புள்ளியியல் மாறியாகவும் இருப்பின்,

$\sigma u^2 = a^2 \sigma x^2 + b^2 \sigma y^2 + 2ab r \sigma x \sigma y$ என்று நிறுவு. மேலும் x, y என்பன சார்பிலா மாறிகளாக இருந்தால்,

$u = x + y$, $v = x - y$ என்ற மாறிகளின் திட்டவிலக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\sqrt{\sigma x^2 + \sigma y^2}$-க்குச் சமம் என்று காட்டு.

இப்பயிற்சியில் சேர்க்க வேண்டிய கணக்குகள் 13, 14, 15-ஐ பிற்சேர்க்கையிலிருந்து எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

13. x, y என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $4y - 9x = 15$, $25x - by = 7$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அம்மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பையும், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகளையும் கணக்கிடு. [விடை : $r = 0{\cdot}735$ $\bar{x} = 2{\cdot}565$ $\bar{y} = 9{\cdot}52$]

14. $0{\cdot}165x + y = 18{\cdot}72$;

$x + 0{\cdot}035y = 6{\cdot}51$ என்பன இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் எனில், அவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க. [விடை : $r = 0{\cdot}1636$]

15. இரண்டு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் $y = ax + 4$ $x = 4y + 5$ என்றிருப்பின், a என்பது மிகை எண் என்றும் அதன் மதிப்பு $0{\cdot}25$-ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாது என்றும் நிறுவு. மேலும் $a = 0{\cdot}125$ எனும் போது $\bar{x}$, $\bar{y}$, r இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. $\left[\text{விடை : } r = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \bar{x} = 42\ \bar{y} = 9{\cdot}25\right]$

9. மார்கோவின் நிகழ்ச்சிக்கோவை

அல்லது

மார்கோவின் சங்கிலி

(MARKOV CHAIN)

இதுகாறும் நாம் பல தொடர்பிலா முயற்சிகளினால் ஏற்படும் விளைவுகளைப்பற்றியும், அவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காணும் முறைகளைப்பற்றியும் பார்த்தோம். ஆனால் பல முயற்சிகளை எடுத்துக்கொள்ளும்போது, ஏதேனும் ஒரு முயற்சியின் விளைவு அதற்குச் சற்றுமுன் எடுத்துக்கொண்ட முயற்சியினைப் பொறுத்து எவ்வாறு அமையும். என்றும், அதன் விளைவாக நமக்குக் கிடைக்கும் முடிவில் ஏற்படும் மாற்றம் எத்தன்மையானது என்றும் இப்பகுதியில்தான் காணவிருக்கிறோம். அதாவது ஒரு நிகழ்ச்சியின் முடிவு, அதற்குச் சற்றுமுன் நடந்த நிகழ்ச்சியைச் சார்ந்திருக்கும் போது, பின்னர் நிகழக்கூடிய எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியின் முடிவையும் காணும் முறையை இங்கு விளக்குவோம்.

இப்பகுதியில் பல விளக்கங்களும் அணுகளின் உதவி யினாலேயே கொடுக்கப்படுமாதலால், அணியைப்பற்றிய சில அடிப்படைத் தத்துவங்களையும், ஒரு சில வரையறைகளையும் முதலில் எடுத்துக் கூறுவோம்.

9.1 வெக்டர் (Vector)

$a = (a_1 \ldots\ldots a_2, \ldots\ldots a_n)$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட வரிசையில் முறையாக அமைந்துள்ள n எண்களை "வெக்டர் a" என்று கூறுகிறோம்.

இங்கு $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பன வெக்டர் a-ன் பிரிவுகள் எனப்படும். இப்பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யமாக இருப்பின் a-ஐ ஒரு பூஜ்ய வெக்டர் என்று கூறுவர்.

λ என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாயின், வெக்டர் a-ன் பிரிவுகளை λ-ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் வெக்டர், a-ன் திசையிலிப் பெருக்கல் என்றழைக்கப்படும். இதை λa என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

அதாவது, $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2 \ldots\ldots \lambda a_n)$ என்றாகும்.

இரண்டு வெக்டர்களின் ஒத்த பிரிவுகள் சமமாக இருக்குமானால், அவ்விரு வெக்டர்களும் சமமானவை என்று கூறுகிறோம். அதாவது $a = (a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$; $b = (b_1, b_2, \ldots\ldots b_n)$ என்றும். $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots\ldots a_n = b_n$ என்றும் இருந்தால், பின் $a = b$ என்றாகும்.

9·2 அணி (Matrix)

ஒரு செவ்வக அமைப்பில் அமைந்துள்ள பல வரிசைகளின் சேர்க்கையை ஒருஅணி என்று அழைக்கிறோம். இவ்வாறு A என்பது ஒரு அணி என்றால்,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். இங்கு m நிரைகளும், n நிரல்களும் உள்ளன. A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் அணியின் ஒரு மூலகம் என்று கூறுவர். i-ஆவது நிரையிலும், j-ஆவது நிரலிலும் உள்ள a_{ij} எனும் மூலகம் "$i - j$ பதிவு" எனப்படும்.

A எனும் அணியை $A = (a_{ij})$ என்று, a_{ij} எனும் மூலகத்தின் வாயிலாகவும் குறிப்பிடுவதுண்டு. இந்த அணியில் m நிரைகளும், n நிரல்களும் இருப்பதால் இதை ஒரு "$m \times n$ அணி" என்று அழைப்பதுண்டு.

$m = n$ என்றால், A என்பது ஒரு "சதுர அணி" எனப்படும் இதையே "n-வர்க்க அணி" என்றும் கூறுவதுண்டு.

$n = 1$ எனில், அணி A-ல் m நிரைகளும், ஒரு நிரலும் இருக்கும். இத்தகைய அணியை "நிரல்வெக்டர்" என்பர்

$m = 1$ எனில், பின் A என்பது ஒரு $1 \times n$ அணியாகும் இதை "நிரைவெக்டர்", என்று கூறுவர்.

ஒரே ஒரு நிரை உடைய அணியை சுருக்கமாக "வெக்டர்" என்றும் கூறுவதுண்டு.

ஒரு அணியின் மூலகங்கள் அனைத்தும் பூஜ்யமாக இருக்குமானால், அதை ஒரு **பூஜ்ய அணி** என்றழைக்கிறோம். அந்த அணியை $O_{m \times n}$ என்றோ அல்லது, சுருக்கமாக, O என்றோ குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

ஒருசதுர அணியின் முக்கிய மூலைவரையிலுள்ள மூலகங்களைத் தவிர, ஏனைய மூலகங்கள் அனைத்தும் பூஜ்யமாக இருக்குமானால், அதை **மூலைவரை அணி** என்று கூறுகிறோம்.

அதாவது, $A = (a_{ij})$ என்ற ஒரு n-வர்க்க அணியில், $i \neq j$ எனும்போது, $a_{ij} = 0$ என்றிருப்பின் A என்பது ஒரு மூலைவரை அணி எனப்படும்.

மேலும், மூலைவரை அணியிலுள்ள முக்கிய மூலைவரையில் காணப்படும் மூலகங்கள் அனைத்தும் சமமாக இருந்தால், அது ஒரு **சமமூலைவரை அணி** என்றழைக்கப்படும்.

அதாவது, $A = (a_{ij})$ என்பது ஒரு சமமூலைவரை அணி என்றால்,

$i = j$ எனும்போது $a_{ij} = a$ என்றும்,

$i \neq j$ எனும்போது $a_{ij} = 0$ என்றும் இருக்கவேண்டும்.

இவ்வரையறையில் $a = 1$ என்று கொள்வோமானால், அதாவது மூலைவரை அணியின் முக்கிய மூலைவரையிலுள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்று என்ற இலக்கத்திற்குச் சமமாக இருந்தால், அந்த அணியை **ஓரலகு அணி** என்கிறோம். ஓரலகு அணியை I_n எனக் குறிப்பிடுவதுண்டு.

அணிகளின் இயற்கணித செய்கைகள் (Algebraic Operations of Matrices) :

9·2·1 அணிகளின் சமமுடைமை (Equality of Matrices) : இரண்டு அணிகளில் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கைகளும், நிரல்களின் எண்ணிக்கைகளும் தனித்தனியே சமமாக இருந்து ஒத்த மூலகங்களும் சமமாக இருக்குமானுல், அவ்விரண்டு அணிகளும் சமம் என்கிறோம்.

அதாவது, $A\,(a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ என்ற அணிகள் இரண்டும் $m \times n$ அணிகளாகவும், i, j-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $a_{ij} = b_{ij}$ என்றும் இருக்குமானுல், இரண்டு அணிகளும் சமம் என்று கூறுகிறோம். இதை $A = B$ என்று எழுதுகிறோம்.

இந்த வரையறையிலிருந்து பின்வரும் முடிவுகளைப் பெறக்கூடும்.

(i) A என்பது ஏதேனும் ஒரு அணியாயில் $A = A$

(ii) $A = B$ என்றிருந்தால், $B = A$ என்றிருக்கும்;

(iii) $A = B$; $B = C$ என்ருல் $A = C$ என்ருகும்.

குறிப்பு : இரண்டு அணிகளுள் ஒன்றின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை, மற்றொன்றின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகவும், அதேபோன்று இரண்டிலுமுள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கைகள் சமமாகவும் இருப்பின், அந்த அணிகளை **ஒப்பிடத்தக்க அணிகள்** என்பர்.

எனவே இரண்டு அணிகள் சமமாக இருக்கவேண்டுமானுல் அவை ஒப்பிடத்தகுந்தவையாகவும், ஒத்த மூலகங்கள் சமமாகவும் இருத்தல் வேண்டும் என அறியலாம்.

9·2·2 அணிகளின் கூட்டுதல் (Addition of Matrices) : இரண்டு ஒப்பிடத்தக்க அணிகளில் உள்ள ஒத்த மூலகங்களைக் கூட்டக்கிடைக்கும் அணியை, அவ்வணிகளின் கூடுதல் என்று வரையறுக்கிறோம்.

அதாவது $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ என்பன இரண்டு $m \times n$ அணிகள் என்ருல், பின் அவற்றின் கூடுதல் $(a_{ij} + b_{ij})$ என்பதும் மற்றொரு $m \times n$ அணியாகும். இதை $A + B$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். $\therefore \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

அணிக் கூட்டலின் பண்புகளாவன :

(i) அணிக் கூட்டம் மாற்றுவிதிக்குட்பட்டது

அதாவது, $A + B = B + A$.

ஏனெனில், $(A + B)$-ம், $(B + A)$-ம் ஒப்பிடத்தக்க அணிகளாகவும், i, j-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $(a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ என்றும் இருக்கும் என நன்கு விளங்கும்.

(ii) அணிக் கூட்டல் சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது.

அதாவது A, B, C என்பன ஒப்பிடத்தக்க அணிகளாயின், பின் $A + (B + C) = (A + B) + C$

ஏனெனில், $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{jj}) + c_{ij}$ என்பது உண்மையாகும்.

(iii) O என்பது $A = (a_{ij})$ என்ற அணியுடன் ஒப்பிடத்தக்க பூஜ்ய அணியாக இருந்தால்.

$A + O = O + A = A$ என்று அறியலாம்

(iv) X, A என்பன இரண்டு ஒப்பிடத்தக்க அணிகளாக இருக்குமானால், $X + A = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $X = (-a_{ij})$ என்பது ஒரு மாற்றற்ற (அல்லது, தனி) தீர்வு எனப்படும். இதை $X = -A$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். இங்கு $-A$ என்பது A என்ற அணியின் **நேரெதிர் அணி ; அல்லது A-ன் எதிர் அணி** எனப்படும்.

குறிப்பு : A, B என்பன ஒப்பிடத்தக்க இரு அணிகளாக இருந்தால் $A + (-B)$ என்ற அணியை, $A - B$ என்று எழுதுதல் மரபு.

9·2-3 அணியை எண்ணியால் பெருக்குதல் (Scalar Multiplication of a Matrix) A என்பது ஒரு $m \times n$ அணியாக இருக்கட்டும். λ என்பது ஏதேனும் ஒரு எண்ணி என்க. பின் A-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் λ ஆல் பெருக்கக்கிடைக்கும் அணியை λA என்கிறோம்.

அதாவது, $A = (a_{ij})$ எனில், $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ என்றாகும். இந்த அணி, A என்ற அணியின் எண்ணிப் பெருக்கல் எனப்படும்.

குறிப்பு : $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (A, B ஒப்பிடத்தக்க அணிகள்) இதை எண்ணிப் பெருக்கலின் பரவல் விதி என்பர்.

9·2-4 அணிப் பெருக்கல் (Multiplications of Matrices) A, B என்பன இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட அணிகளாக இருக்கட்டும். மேலும் A-ல் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை, B-ல் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது A என்பது ஒரு $m \times p$ அணி என்றும், B என்பது ஒரு $p \times n$ அணு என்றும் எடுத்துக்கொள்வோம். பின் A, B என்ற அணிகளின் பெருக்குத்தொகை ஒரு $m \times n$ அணியாக இருக்கும். இதை AB என்று குறிப்பிடுவதுண்டு

AB என்ற அணியின் $i-j$ பதிவைப் பெற, A-ன் i-ஆவது நிரையில் உள்ள மூலகங்களை முறையே B ன் j-ஆவது நிரலில் உள்ள மூலகங்களால் பெருக்கி, அப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கூட்ட வேண்டும்.

அதாவது, $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$ என்றும்
$AB = C = (C_{ij})$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால்,
பின், $C_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}\ b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}$ என்று இருக்கும்.

குறிப்பு : (i) A-ல் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை, B ல் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இராவிடில், AB என்ற பெருக்குத் தொகை வரையறுக்கப்படமாட்டாது. அதாவது A என்பது ஒரு $m \times n$ அணியாகவும், B என்பது ஒரு $p \times q$ அணியாகவும் இருந்து $n \neq p$ என்றிருப்பின் AB-ஐ வரையறுக்க முடியாது.

இதிலிருந்து $AB \neq BA$ என்று அறியக்கூடும்; அதாவது அணிப்பெருக்கல் பரிமாற்று விதிக்கு உட்படாது என்று தெரிகிறது

(ii) A என்பது ஒரு n-வர்க்க அணியாக இருந்தால், பின் A-ன் எல்லா படிகளையும் அணிகளாகக் கூற முடியும் மேலும் அவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு n-வர்க்க அணியாக இருக்கும். இவ்வாறு $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, $A^4 = A^3 \cdot A$, ... என்று அறிலாம்.

(iii) a என்பது n பிரிவுகளையுடைய ஒரு வெக்டராகவும், A என்பது ஒரு n-வர்க்க அணியாகவும் இருப்பின், $a \cdot A$ என்ற

பெருக்குத் தொகையை வரையறுக்க முடியும். இப் பெருக்குத் தொகையும் n பிரிவுகளையுடைய ஒரு வெக்டராகும்

9·3 நிலையான வெக்டர் (Fixed Rector)

a என்பது ஒரு பூஜ்யமல்லா வெக்டராகவும், A என்பது ஏதேனும் ஒரு அணியாகவும் இருக்கட்டும். a எனும் வெக்டரை A ஆல் பெருக்கும்போது, அவ்வெக்டரின் மதிப்பு மாறுமல் இருக்குமானுல், வெக்டர் a-ஐ, அணி A-ன் நிலையான வெக்டர் அல்லது மாரு வெக்டர்) என்று கூறுவர்.

அதாவது $a \neq 0$ என்றும், $aA = a$ என்றும் இருக்குமானுல், a என்பது A-ன் நிலையான வெக்டர் எனப்படும்.

9·3-1 தேற்றம் : a என்பது A என்ற அணியின் நிலையான வெக்டர் என்ருல், பின் a-ன் பூஜ்யம் அல்லா எண்ணிப்பெருக்கல் ஒவ்வொன்றும், A-ன் நிலையான வெக்டராக இருக்கும்.

அதாவது, λ என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணுயின், $(\lambda a) A = \lambda (aA) = \lambda a$ என்று விளங்கும்.

9·4 நிகழ்தகவு வெக்டர்களும், ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிகளும் (Probability Vectors and Stochastic Matrices)

அ· நிகழ்தகவு வெக்டர்

$a = (a_1, a_2, \dots a_n)$ எனும் வெக்டரின் பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் குறை எண்ணுக இராமல் அவற்றின் கூடுதல் ஒன்று என்றிருக்குமானுல், a என்பது ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டர் என்று கூறப்படும்.

ஆ. ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி

$P = (p_{ij})$ என்பது ஒரு சதுர அணியாகவும், இந்த அணியின் ஒவ்வொரு நிரையும் ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டராகவும் இருக்குமானுல், P-ஐ ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்கிருேம்.

அதாவது P-ன் ஒவ்வொரு மூலகமும் குறை எண்ணுக இராமல். ஒவ்வொரு நிரையிலும் உள்ள மூலகங்களின் கூடுதல் ஒன்று என்றிருக்குமானுல், P என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாகும்.

9 4-1 : தேற்றம் P, Q என்பன இரண்டு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிகளாக இருக்குமானுல், அவற்றின் பெருக்குத் தொகையாகிய PQ-ம் ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக இருக்கும்.

நிரூபணம்

இத்தேற்றத்தை 3 தரமுடைய அணிகளைக் கொண்டு நிறுவிக் காட்டுவோம்.

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

என்றிருக்கட்டும்.

ஆகையால், a_i, b_i, c_i என்பனவும் x_i, y_i, z_i என்பனவும் குறை எண்களாக இருக்க முடியாது. மேலும்,

$$a_1 + b_1 + c_1 = 1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 1 = x_2 + y_2 + z_2 = x_3 + y_3 + z_3$$

என்றிருக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது, $$PQ = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3) & (a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3) & (a_1 z_1 + b_1 z_2 + c_1 z_3) \\ (a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3) & (a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3) & (a_2 z_1 + b_2 z_2 + c_2 z_3) \\ (a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3) & (a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3) & (a_3 z_1 + b_3 z_2 + c_3 x_3) \end{bmatrix}$$

இந்த பெருக்கல் அணியின் ஒவ்வொரு மூலகமும் குறை எண் அல்ல. மேலும் முதல் நிரையின் கூடுதல்

$$= (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3) + (a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3) + (a_1 z_1 + b_1 z_2 + c_1 z_3)$$

$$= a_1 (x_1 + y_1 + z_1) + b_1 (x_2 + y_2 + z_2) + c_1 (x_3 + y_3 + z_3)$$

$$= a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 1 + c_1 \cdot 1$$

$= a_1 + b_1 + c_1 = 1$ என்றுகிறது.

இதேபோன்று இரண்டாவது, மூன்றுவது நிரைகள் ஒவ்வொன்றின் கூடுதலும் ஒன்று எனக் காட்டலாம்.

இவ்வாறு PQ என்ற பெருக்கல் அணியும் ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிதான் என்று அறிகிறேம்.

துணை முடிவுகள்

(*i*) P என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக இருந்தால், பின் P^2, P^3, ………… P^n போன்ற P-ன் எல்லாபடி அணிகளும் ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிகளாகவே இருக்கும்.

(*ii*) P என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாகவும் $p = (p_1, p_2, p_3)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டராகவும் இருந்தால், பின் pP-ம் ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டராக இருக்கும்.

(இ) ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி: ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் ஏதேனும் ஒரு படி அணியின் மூலகங்கள் அனைத்தும் மிகை எண்களாக இருக்குமானல், அந்த அணியை ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்று கூறுகிறேம்.

அதாவது, P என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாகவும், m என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண்ணுகவும் இருந்து, P^m என்ற அணியின் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் மிகை எண்ணுக இருக்குமானல், பின் P ஒரு ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக இருக்கும்.

ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் பண்புகள் பின்வருமாறு:

P என்பது ஒரு ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்றுல், பின்

(*i*) P-க்கு, மிகைப் பிரிவுகளால் ஆன t எனும் ஒரு நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டர் இருக்க வேண்டும்.

(*ii*) T என்ற அணியின் ஒவ்வொரு நிரையும், t என்ற நிலையான புள்ளியாக இருந்தால், P-ன் வெவ்வேறு படிகளாகிய $P, P^2, P^3, \ldots\ldots$ என்ற அணிகளால் ஆன தொடர் முறையானது T என்ற அணியை அணுகும்.

(*iii*) p என்பது ஏதேனும் ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டர் எனில்,

$Pp, pP^2, pP^3, \ldots\ldots$ என்ற வெக்டர்களின் தொடர் முறை t என்ற நிலையான புள்ளியை அணுகும்.

குறிப்பு: (*i*) P^n எனும் அணியின் ஒவ்வொரு மூலகமும் அதற்கு ஒப்பான T-ல் உள்ள மூலகத்தை அணுகுமானால், P^n என்ற அணி T-ஐ அணுகுவதாகக் கூறுகிறோம்

(*ii*) இதேபோன்று, pP^n எனும் வெக்டரின் ஒவ்வொரு பிரிவும் t-ல் உள்ள அதற்கு ஒப்பான பிரிவை அணுகுமானால், pP^n என்ற வெக்டர் t என்ற நிலையான புள்ளியை அணுகும் என்று கூறுவோம்,

(*iii*) இதுவரை பார்த்த வரையறைகளையும், தேற்றங்களையும் நன்கு புரிந்து கொள்ள ஏதுவாக, ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு கணக்குகள்

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளின் பெருக்கலைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

A என்பது ஒரு 2×3 அணி என்றும், B என்பது ஒரு 3×1 அணி என்றும் தெரியும். எனவே AB ஒரு 2×1 அணியாக இருக்கும்.

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 3 \times (-2) + 5 \times 3 \\ 2 \times 1 = 4 \times (-2) + 6 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

2 பின்வரும் அணிகளின் பெருக்கலைக் காண்க :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A என்பது ஒரு 2×3 அணியாகவும், B என்பது ஒரு 3×3 அணியாகவும் இருப்பதால், AB என்பது ஒரு 2×3 அணியாக இருக்கும்.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (18+0+0) & (-3+4+0) & (6+20+0) \\ (-6+0-2) & (1+0+6) & (-2+0+8) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 1 & 26 \\ -8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால் A^2 எனும் அணியைக் கண்டுபிடி.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+0+0) & (1-1+0) & (1+0-1) \\ (0+0+0) & (0+1+0) & (0+0+0) \\ (0+0+0) & (0+0+0) & (0+0+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $a = [3 \quad 0 \quad -2]$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

என்றால், aA என்ற வெக்டரைக் கண்டுபிடி.

$$aA = [3 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= [\,(3-10) \quad (-6-4) \quad (9-6)\,]$$
$$= [-7 \quad -10 \quad 3]$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால், A^n என்ற அணியைக் காண்க.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+0) & (2+2) \\ (0+0) & (0+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\cdot 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3\times 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4\times 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இவ்வாறு அடுத்தடுத்துள்ளபடி அணிகளைக் காண்போமானல்,

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & n\times 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்று பெறக்கூடும்.

6. பின்வருவனவற்றுள் எவை நிகழ்தகவு வெக்டர்கள் ?

(i) $a = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, (ii) $b = \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$

(iii) $c = \left[\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{4}\right]$, (iv) $d = \left[1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right]$

(i) வெக்டர் a-ன் பிரிவுகளில் ஒன்று $\left(\frac{-1}{4}\right)$ குறை எண்ணுக இருப்பதால், இது நிகழ்தகவு வெக்டராகும்.

(ii) வெக்டர் b-ன் பிரிவுகள் எல்லாம் குறையெண்ணுக இல்லாவிடினும், அவற்றின் கூடுதல் ஒன்றைவிட அதிகமாக இருப்பதால், இதுவும் நிகழ்தகவு வெக்டர் அல்ல.

(iii) வெக்டர் c-ன் பிரிவுகள் பூஜ்யமாகவோ அல்லது மிகை எண்ணுகவோ இருப்பதாலும், அவற்றின் கூடுதல் ஒன்று என்றிருப்பதாலும், இது ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டராகும்.

(iv) d-ம் நிகழ்தகவு வெக்டர் அல்ல.

7. $\left[\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ என்ற வெக்டரை எந்த எண்ணியால் பெருக்கினல் ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டர் கிடைக்கும் ?

$a = \left[\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ என்க.

வெக்டர் a-ன் பிரிவுகளின் கூடுதல் $= \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

$= \frac{45}{12}$ ஆகையால் இப்பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றையும் $\frac{12}{45}$ - ஆல் பெருக்கினல், இவை ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டரை உருவாக்கும்.

எனவே தேவையான நிகழ்தகவு வெக்டர்

$$= \left[\frac{4}{45}, \frac{24}{45}, \frac{6}{45}, 0, \frac{3}{45}, \frac{8}{45}\right]$$

8. பின்வரும் அணிகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரைக் கண்டுபிடி.

(i) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$; (ii) $B = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

(i) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

A-ன் நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை $t = [x, y]$ என்க.

பின் $x + y = 1$ என்றிருக்க வேண்டும்.

மேலும் $t \cdot A = t$ என்றிருக்க வேண்டும்.

அதாவது $[x, y]\begin{bmatrix} \frac{1}{4}, & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6}, & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = [x,y]$

i.e., $\left[\left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{6}y\right), \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y\right)\right] = [x, y]$

$\therefore \quad \frac{1}{4}x + \frac{5}{6}y = x; \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y = y$ என்று கிடைக்கும்.

இவற்றிலிருந்து, $\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 0$ என்றாகும்.

ஆனால், $x + y = 1$

$\therefore \quad \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}(1 - x) = 0$

i.e., $\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right)x = \frac{5}{6}$

எனவே, $x = \frac{10}{19}, y = \frac{9}{19}$ என்று பெறலாம்.

இவ்வாறு தேவையான நிகழ்தகவு வெக்டர் $t = \left[\frac{10}{19}, \frac{9}{19}\right]$ என்றாகும்.

(ii) $B = \begin{bmatrix} 0{\cdot}7 & 0{\cdot}3 \\ 0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 \end{bmatrix}$-ன் நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை $U = [x, y]$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\therefore \quad UB = U$ என்றிருக்க வேண்டும்.

i.e., $[x, y]\begin{bmatrix} 0{\cdot}7 & 0{\cdot}3 \\ 0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 \end{bmatrix} = [x, y]$

i.e., $[(0{\cdot}7)x + (0{\cdot}6)y, \; (0{\cdot}3)x + (0{\cdot}4)y] = [x, y]$

$$\therefore \quad (0{\cdot}7)\,x + (0{\cdot}6)\,y = x; \quad (0{\cdot}3)\,x + (0{\cdot}4)\,y = y$$

$$i.e., \quad (0{\cdot}3)\,x - (0{\cdot}6)\,y = 0$$

ஆனால் $x + y = 1$

$$\therefore \quad (0{\cdot}3)\,x - (0{\cdot}6)\,(1 - x) = 0$$

ஆகையால் $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3}$ என்று கிடைக்கும்.

எனவே தேவையான நிகழ்தகவு வெக்டர், $U = \left[\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right]$

9. $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின்

நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரைக் கண்டுபிடி. மேலும் P^n அணுகக் கூடிய அணியையும், $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cdot P^n$ அணுகக்கூடிய வெக்டரையும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை, $t = [x, y, z]$ என்க.

ஆகையால், $tP = t$ என்றிருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $[x, y, z] \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [x, y, z]$ என்றுரும்.

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$\frac{y}{2} = x$, $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y + z = y$, $\frac{1}{4}x = z$ என்று பெறலாம்.

$\therefore$ $y = 2x$, $3x + 2y + 4z = 4y$, $x = 4z$ என்றாகும். ஆனால் $x + y + z = 1$ என்றிருக்க வேண்டும்.

இவற்றின் தீர்வுகள் காண, $x = \frac{4}{13}$, $y = \frac{8}{13}$, $z = \frac{1}{13}$ என்று கிடைக்கும். எனவே தேவையான நிகழ்தகவு வெக்டர்

$$t = \left[\frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{1}{13}\right]$$ என்றாகும்.

இப்பொழுது $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

111^{rly} $P^3 = P \cdot P^2$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{19}{32} & \frac{3}{32} \\ \frac{5}{16} & \frac{10}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$P^4 = P^2 \cdot P^2$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{19}{64} & \frac{40}{64} & \frac{5}{64} \\ \frac{10}{32} & \frac{39}{64} & \frac{5}{64} \\ \frac{5}{16} & \frac{10}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$P^5 = P^2 \cdot P^3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{19}{32} & \frac{3}{32} \\ \frac{5}{16} & \frac{10}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{80}{256} & \frac{157}{256} & \frac{19}{256} \\ \frac{78}{256} & \frac{158}{256} & \frac{20}{256} \\ \frac{80}{256} & \frac{156}{256} & \frac{20}{256} \end{bmatrix}$$

இவ்வாறு அடுத்துள்ள P-ன் படிகளைக் காண்போமானல், P^n-ன் எல்லை மதிப்பு,

$$T = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$ என்று பெறலாம்.

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cdot P^n\text{-ன் எல்லை மதிப்பு} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13}\right), \left(\frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{4}{13}\right), \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{26}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{1}{13}\right]$$

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிகளுள் எவை ஒழுங்கு அணிகள் என்று கண்டுபிடி.

(i) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

111'' $P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{15}{32} & \frac{7}{33} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

இவ்வாறு P-ன் எல்லாபடி அணிகளிலும் முக்கிய மூலவரையின் ஒரு மூலகம் ஒன்று என்றிருக்குமாதலால், இரண்டாவது நிரையின் மற்ற இரண்டு மூலகங்களும் பூஜ்யமாகவே இருக்கும். எனவே இது ஒழுங்கு அணியாக இருக்க முடியாது என்று அறிகிறோம்.

(ii) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்;

$$P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

இவ்வாறு P-ன் எல்லா படி அணிகளிலுமே, கடைசி நிரலின் முதல் இரண்டு மூலகங்கள் பூஜ்யமாக இருக்கும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட அணி, P ஒழுங்கு அணி அல்ல.

(iii) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ எ—க.

$$\therefore \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

111rly $$P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

எனவே P^5-ன் மூலகங்கள் எல்லாம் மிகை எண்களாகவே இருப்பதால் அணி P ஒரு ஒழுங்கு அணியாகும் என்று அறிகிறோம்

9.5 மார்கோவின் நிகழ்ச்சிக்கோவை

வரையறை

ஒரு தொடர்முறையில் அமையும் மிகப் பல முயற்சிகளின் விளைவுகளை அல்லது முடிவுகளை $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots$ என்று குறிப்பிடுவோம். இந்த தொடர்முறை கீழ்காணும் நிபந்தனை களுக்குட்பட்டிருக்குமானால், இது ஒரு முடிவுடைய மார்கோவின் நிகழ்ச்சிக்கோவையை உருவாக்கும் என்று கூறுகிறோம்

(i) $\{ a_1, a_2, \ldots \ldots\ldots a_m \}$ எனும் தொடர்முறை, எடுத்துக் கொள்ளப்படும் முயற்சிகளின் பல்வேறு விளைவுகளின் முடிவுடைய தொகுதியைக் குறிக்குமானால் $E_2, E_1, E_3, \ldots\ldots\ldots$ என்ற விளைவுகள் ஒவ்வொன்றும் இத்தொகுதியில் இருத்தல் வேண்டும்.

இத்தொடர்முறையை "நிலைவெளி" என்று அழைப்பதுண்டு.

(ii) எந்த ஒரு முயற்சியின் விளைவும், அதற்குச் சற்று முன் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட முயற்சியின் விளைவைச் சார்ந்திருக்க வேண்டுமே தவிர, வேறு எந்த ஒரு முயற்சியின் விளைவையும் சார்ந்திருக்கக்கூடாது.

(iii) a_i என்பது n-ஆவது முயற்சியின் விளைவைக் குறிக்குமானால். பின் n-ஆவது நேரத்தில் (அல்லது n-ஆவது படியில்), கொடுக்கப்பட்டதொகுதி a_i எனும் நிலையில் இருப்பதாகக் கூறப்படும்.

a_i என்ற நிலைக்கு அடுத்தாற்போல், உடனே a_j என்ற நிலையை இத்தொகுதி அடைவதற்கான நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவை p_{ij} குறிக்குமானால். (a_i, a_j) எனும் ஒவ்வொரு ஜோடி நிலைகளுக்கும் ஒப்ப p_{ij} எனும் நிகழ்தகவு கொடுக்கப் படவேண்டும்.

இங்கு p_{ij} எனும் எண்கள் "நிலைதிரிபு நிகழ்தகவுகள்", அல்லது "இடைபெயர்வு நிகழ்தகவுகள்" எனப்படும். இந் நிகழ்தகவுகளை பின்வரும் அணி அமைப்பில் வரிசைப்படுத்த முடியும்.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots & p_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

இந்த அணியை "நிலைதிரிபு" அணி என்று அழைப்பர்.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் a_i என்ற ஒவ்வொரு நிலைக்கும் ஒப்ப நிகழ்திரிபு அணியின் i-ஆவது நிரை அமைந்துள்ளது. அதாவது இத்தொகுதி a_i என்ற நிலையில் இருக்குமானால், அதற்கு அடுத்த நிலைக்கான வெவ்வேறு நிகழ்தகவுகளையும் $(p_{i1}\ p_{i2}\ p_{i3} \cdots\cdots p_{im})$ என்ற வெக்டர் குறிக்கும் என்று பொருளாகும்.

இவ்வாறு, நிலைதிரிபு அணியின் நிரைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டர் என்று அறியலாம். எனவே, ஒவ்வொரு நிரையிலும் உள்ள மூலகங்களின் கூடுதல் ஒன்று என்றிருக்கும். இவற்றிலிருந்து P என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி எனத் தெரிகிறது.

மேலும், எந்த ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியும் நிலைதிரிபு அணியாக இருக்கக்கூடும். இத்தகைய ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியும், $\{a_i\}$ எனும் ஆரம்ப நிலைப்பரவலும் சேர்ந்து E_1, E_2, E_3, ……… என்ற நிலைகளுக்கான மார்கோவின் சங்கிலியை முற்றிலும் வரையறுக்கும் என்று அறிகிறோம்.

இவற்றை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிக்கு வெற்றி, தோல்வி என்ற இரண்டே விளைவுகள்தான் உண்டு என்று கொள்வோம். மேலும் ஒரு வெற்றிக்கு அடுத்து ஒரு தோல்வி ஏற்படும் என்றும் கருதுவோம். E_1 என்பது வெற்றியையும், E_2 என்பது தோல்வியையும் குறிக்கட்டும். வெற்றிக்கான நிகழ்தகவுகளை p, p' என்றும். தோல்விக்கான நிகழ்தகவுகளை q, q' என்றும் எடுத்துக்கொள்வோமானால், இந்நிகழ்ச்சிக்கோவையின் நிலைதிரிபு அணி

$$P = \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ p & q \\ p' & q' \end{bmatrix}$$ என்று கிடைக்கப்பெறும்.

இங்கு $p + q = 1 = p' + q'$ என்று அறியக்கூடும். மேலும் p என்பது ஒரு வெற்றியை அடுத்து மேலும் ஒரு வெற்றி கிடைப்பதையும், p' என்பது ஒரு தோல்விக்கடுத்து வெற்றி கிடைப்பதையும் குறிக்கும்.

குறிப்பாக, X-அச்சின்மீது மிகைத்திசையில் 1 அல்லது, -1 என்ற திசைவேகத்துடன் நகரும் ஒரு பந்தை எடுத்துக்கொள்வோமானால், முதலாவது 2-ஆவது, 3-ஆவது, இன்னபிற நிலைகளில் (அல்லது நேரங்களில்) பந்து மிகைத்திசையில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு p என்றும், எதிர்த்திசையில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு

q என்றும் அறியலாம். இங்கு E_1 என்பது பந்தின் திசைவேகம் 1 என்றிருத்தலையும், E_2 என்பது பந்தின் திசைவேகம் — 1 என்றிருத்தலையும் குறிப்பனவாகும். இவ்வாறு இந்நிகழ்ச்சிக் கோவைக்கான நிலைதிரிபு அணி,

$$P = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$ என்று தெரிகிறது.

2. பேராசிரியர் ஒருவர் ஒவ்வொரு நாளும் காரிலோ அல்லது ஸ்கூட்டரிலோ கல்லூரிக்குச் செல்வது வழக்கம் தொடர்ச்சியாக இரண்டு நாட்கள் அவர் ஸ்கூட்டரில் செல்வாரானுல், மூன்ருவது நாள் அவர் காரில் செல்வதற்கான வாய்ப்பு சரிசமமாக இருக்குமானுல், இந்நிகழ்ச்சிகளுக்கான ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியைக் காண்க.

கல்லூரிப் பேராசிரியர் காரில் செல்லும் நிகழ்ச்சியை C என்றும், அவர் ஸ்கூட்டரில் செல்லும் நிகழ்ச்சியை S என்று குறிப்பிடுவோம். ஆகையால் இந்நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிலைவெளி $\{C, S\}$ என்ருகும். மேலும் ஒரு நாளில் காரில் செல்வது (அல்லது ஸ்கூட்டரில் செல்வது) முதல் நாளில் நடந்த நிகழ்ச்சியைப் பொறுத்து அமையும். எனவே இந்த ஸ்டொக்காஸ்டிக் முறையானது ஒரு மார்கோவின் சங்கிலி என்று அறிகிறோம்.

பேராசிரியர் தொடர்ந்து இரண்டு நாட்கள் ஸ்கூட்டரில் செல்வார் என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாலும், மூன்ருவது நாள் அவர் காரிலோ அல்லது ஸ்கூட்டரிலோ செல்ல சரிசமவாய்ப்பு உண்டு என்பதாலும், இந்த மார்கோவின் சங்கிலியைக் குறிக்கும் நிலைதிரிபு அணி,

$$P = \begin{array}{c} \\ C \\ S \end{array} \begin{bmatrix} C & S \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ என்று கிடைக்கப்பெறும்.

3. பல்கலைக்கழகப் பேராசிரியர் ஒருவர் சென்னை நகரிலுள்ள முக்கியமான மூன்று கல்லூரிகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் ஒவ்வொரு நாளும் சிறப்புச் சொற்பொழிவாற்றிவருவார். அவர் தொடர்ந்து இரண்டு நாட்கள் ஒரே கல்லூரிக்குச் செல்வது கிடையாது. அவர் ஏதேனும் ஒருநாள் X என்ற கல்லூரிக்குச் சென்றால், அதற்கு அடுத்த நாள் அவர் Y என்ற கல்லூரிக்குச் செல்வது உறுதியாகும். ஆனால் Y அல்லது Z என்ற கல்லூரிக்குச் சென்றுவந்த மறுநாள், அவர் கல்லூரி X-க்குச் செல்வதற்கான வாய்ப்பும், மற்றொரு கல்லூரிக்குச் செல்வதற்கான வாய்ப்பும் சமம் என்று கொடுக்கப் பட்டால், இந்நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்க ஒரு நிலைதிரிபு அணியை அமைத்துக்காட்டு.

இங்கு கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிக்கோவை ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் முறையை உருவாக்கும் என்று விளங்குகிறது. ஏனெனில் ஒருநாளில் நடக்கும் நிகழ்ச்சி, அதற்கு முதல்நாள் நடந்த நிகழ்ச்சியைப் பொறுத்துள்ளது. முதல் நாள் அப் பேராசிரியர் கல்லூரி X-க்குச் சென்றால். அடுத்த நாள் அவர் கல்லூரி Y-க்குச் செல்வது உறுதி என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது X என்ற நிலையிலிருந்து Y என்ற நிலைக்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு ஒன்று என்று அறிகிறோம். ஆனால் Y என்ற நிலையிலிருந்து Z-க்கோ அல்லது X-க்கோ செல்வதற்கான வாய்ப்புகள் சமம் என்றிருப்பதால், $p_{21} = \frac{1}{2} = p_{23}$ என்றும், $p_{31} = \frac{1}{2} = p_{32}$ என்றும் அறிகிறோம். மேலும் இங்கு $\{X, Y, Z\}$ என்பது நிலைவெளி என்றும் தெரியும். எனவே, தேவையான நிலைதிரிபு அணி பின்வருமாறு.

$$P = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

9·5-1 எதிர் தாக்கும் (அல்லது எதிரே செலுத்தும்) தடங்களையுடைய இயைபிலா நடை (Random Walk With Reflecting Barriers): அடுத்துள்ள இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் ஒரு அலகு என்றிருக்குமாறு X-அச்சின் மீது, ஆதியின் வலது பக்கத்தில், m புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம் ஆதிக்கும், m-ஆவது புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள $(m-1)$ புள்ளிகளுள் ஏதேனும் ஒன்றில் ஒருவர் நிற்பதாகக் கருதுவோம் இவர் X-அச்சின் மீது வலது புறம் ஒரு அலகு தூரம் செல்வதற்கான நிகழ்தகவை p என்றும், இடது புறம் ஒரு அலகு தூரம் செல்வதற்கான நிகழ்தகவை q என்றும் கொள்வோமானால், $p+q=1$ எனத் தெரியும். ஏனெனில், அவர் ஏதேனும் ஒரு பக்கம் செல்வது உறுதியாகும்.

மேலும், அவர் ஆதியிலிருந்து ஒரு அலகு தூரம் வலது புறம் தான் செல்ல முடியும் என்றும், அதேபோன்று m-ஆவது புள்ளியிலிருந்து ஒரு அலகு தூரம் இடது புறம் தான் செல்ல முடியும் என்றும் கருதுவோம். அதாவது, ஆதியிலிருந்து 1-ஆவது புள்ளிக்கும், m-லிருந்து $(m-1)$-ஆவது புள்ளிக்கும் தான் அவர் ஒரே அடியில் செல்ல முடியும் என்று பொருளாகும். இத்தகைய நிகழ்ச்சிக்கோவை ஒரு மார்கோவின் சங்கிலி என்று அறியலாம். அவர் i-ஆவது புள்ளியில் இருக்கும் நிகழ்ச்சியை a_i என்ற நிலையினால் குறிப்பிடுவோமானால், இந்த மார்கோவின் சங்கிலிக்கான நிலை வெளி, $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$ எனும் தொடர் முறை என்று தெரிகிறது. இதன் நிலை திரிபு அணி பின்வருமாறு

$$
\begin{array}{c|cccccccc|}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_{m-1} & a_m \\
\hline
a_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\
a_1 & q & 0 & p & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\
a_2 & 0 & q & 0 & p & \cdots\cdots & 0 & 0 \\
a_3 & 0 & 0 & q & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0
\end{array}
$$

இந்த அணியின் முதல் நிரை அம்மனிதர் a_0 என்ற நிலையிலிருந்து a_1 என்ற நிலைக்குச் செல்வார் என்பதையும், கடைசி நிரை அவர் a_m என்ற நிலையிலிருந்து a_{m-1}-க்குச் செல்வார் என்பதையும் குறிக்கின்றன. ஏனைய ஒவ்வொரு நிரையும்; அவர் a_i எனும் நிலையிலிருந்து a_{i+1}-க்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு p என்றும், a_{i-1}-க்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு q என்றும் தெரிவிக்கின்றது. இவ்வாறு $(m+1)$ புள்ளிகளுக்கிடையே அமையும் இயைபிலா நடையை அணியின் வெவ்வேறு நிரைகள் மூலம் அறிய முடிகிறது.

9·5-2 உயர்நிலை நிலைதிரிபு நிகழ்தகவுகள் (Higher Transition Probability) : மார்கோவின் நிகழ்ச்சிக்கோவையில், கொடுக்கப் பட்ட தொகுதி a_i என்ற நிலையிலிருந்து a_j என்ற நிலைக்கு ஒரே அடியில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவை, நிலைதிரிபு அணி P-ல் உள்ள i-j பதிவாகிய p_{ij} குறிக்கும் என்று பார்த்தோம். அவ்வாறின்றி, a_i என்ற நிலையிலிருந்து a_j-க்கு n அடிகளில் தான் செல்லமுடியும் என்றால் அதற்குரிய நிகழ்தகவை எவ்வாறு கணக்கிடுவது என்பதை இங்கு பார்ப்போம்.

a_i எனும் நிலையிலிருந்து, a_j-க்கு n அடிகளில் செல்லும் நிலை மாற்றத்தை

$$a_i \rightarrow a_{k_1} \rightarrow a_{k_2} \rightarrow a_{k_3} \rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots \rightarrow a_{k_{m-1}} \rightarrow a_j$$

என்று குறிப்பிடுவோம். அதாவது $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3} \cdots\cdots a_{k_{m-1}}$ என்ற நிலைகளைக் கடந்தபின் a_j என்ற நிலையை அடையலாம் என்று கொண்டுள்ளோம். இந்நிலை மாற்றத்திற்கான நிகழ்தகவை $p_{ij}^{(n)}$ என்று குறிப்பிடுவோமானால், இதை P^n எனும் அணியாக வரிசைப்படுத்தி எழுத முடியும். இந்த அணியை n-அடி நிலை திரிபு அணி என்று கூறுவர். பின்வரும் தேற்றத்தின் மூலம், இந்த அணியைக் கணக்கிடலாம்

9·5-3 தேற்றம் : ஒரு மார்கோவின் சங்கிலி முறையின் நிலை திரிபு அணி P என்றால், பின் n-அடி நிலை திரிபு அணி P-ன் n-ஆவது படிக்குச் சமமாகும்.

அதாவது $P^{(n)} = P^n$ என்பதாம்.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி k-ஆவது நேரத்தில் a_i என்ற நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். $(k+n)$-ஆவது நேரத்தில்

அத்தொகுதி a_j எனும் நிலையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p_{ij}^{(n)}$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

k-ஆவது நேரத்தில் தொகுதியின் நிலை a_i என்றிருப்பதால் இந்நிலையைக் குறிப்பிடும் நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$\alpha_i = (0, 0, \ldots 0, 1, 0, \ldots\ldots 0)$ எனும் வெக்டராகும். இந்த வெக்டரில் i-ஆவது மூலகம் 1 எனவும், ஏனைய மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யமாகவும் இருக்கும் என்பதை அறியலாம்.

மேலும் $(k+n)$-ஆவது நேரத்தில், நிகழ்தகவுப் பரவல் $\alpha_i p^n$ என்றிருக்கும் எனத் தெரியும். ஆனால் இது P^n-என்ற அணியின் i-ஆவது நிரை என்பது நமக்கு விளங்கும். ஆகையால் $p_{ij}^{(n)}$ என்பது P^n-ன் i-ஆவது நிரையின் j-ஆவது பிரிவாகும். P^n-ன் ஒவ்வொரு நிரையையும் இவ்வாறு பெற முடியும். எனவே,

$p^{(n)} = P^n$ என்று அறிகிறோம்.

9.5-4 நிகழ்தகவுப் பரவல் (Probability Distribution) : ஒரு கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் a_i என்ற நிலையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை p_i எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு i-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு ஒப்ப கிடைக்கப்பெறும் இந்நிகழ்தகவுகள்,

$p = (p_1, p_2, \ldots p_m)$ என்ற நிகழ்தகவு வெக்டரால் குறிக்கப்படும். இவ்வெக்டரை அந்நேரத்தில் அமையும் நிகழ்தகவுப் பரவல் என்கிறோம்

மேலும் ஸ்டொக்காஸ்டிக் முறை ஆரம்ப நிலைக்கான பரவலை,

$p^{(0)} = [p_1^{(0)}, d_2^{(0)} \ldots\ldots p_m^{(0)}]$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

இதேபோன்று முதல் n அடிகளுக்குப் பிறகுள்ள நிலைக்கான பரவலை,

$p^{(n)} = [p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots p_m^{(n)}]$ என்று குறிப்பிடுவதுண்டு. இது "n" ஆவது அடி நிகழ்தகவுப் பரவல்" எனப்படும்.

9.5-5 தேற்றம்: கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தொகுதிக்கான மார்கோவ் சங்கிலி முறையின் நிலை திரிபு அணியை P என்க. ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் அத்தொகுதியின் நிகழ்தகவுப் பரவலை p என்க. பின்

ஒரு அடிக்குப் பிறகு அத்தொகுதியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் $p \cdot P$ என்றும், முதல் n அடிகளுக்குப் பிறகு அதன் நிகழ்தகவுப் பரவல் $p \cdot P^n$ என்றும் இருக்கும்.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் நிலை வெளியை

$\{ a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m \}$ எனக் கொள்வோம்.

$P = [P_{ij}]$ என்பது இத்தொகுதியின் நிலைதிரிபு அணியாகவும், $P = [p_i]$ எனும் வெக்டர், K என்ற ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் உள்ள நிகழ்தகவுப் பரவலாகவும் உள்ளன.

இத்தொகுதி K-ஆவது நேரத்தில் a_j எனும் நிலையிலும், அதற்குப் பிறகு $(K+1)$-ஆவது நேரத்தில் a_i எனும் நிலையிலும் இருப்பதற்கான கூட்டு நிகழ்தகவு $(p_j \cdot p_{ji})$ என்பதாகும். ஆகையால் $(K+1)$-ஆவது நேரத்தில், தொகுதி a_i என்ற நிலையிலும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$p_1 p_{1i} + p_2 p_{2i} + p_3 p_{3i} + \ldots\ldots + p_m p_{mi} = \sum_{j=1}^{m} p_j p_{ji}$$

என்ற கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

மேலும் $(K+1)$-ஆவது நேரத்தில் நிகழ்தகவுப் பரவலை p' எனும் வெக்டரால் குறிப்பிடுவோமானால், பின்

$$p' = \left[\sum_{j=1}^{m} p_j p_{j1}, \sum_{j=1}^{m} p_j p_{j2}, \ldots\ldots \sum_{j=1}^{m} p_j p_{jm} \right]$$

என்றாகும்.

ஆனால் $p = [p_i]$ என்ற வெக்டரை, $P = [p_{ij}]$ என்ற அணியினால் பெருக்கக் கிடைக்கும் வெக்டர் p'-க்குச் சமமாக இருக்கும் என்று எளிதில் விளங்கும். எனவே $(K+1)$-ஆவது நேரத்தில் நிகழ்தகவுப் பரவலின் மதிப்பு $p \cdot p$ என்று அறிகிறோம்.

இதேபோன்று $(K+2)$-ஆவது நேரத்தில், கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் $p \cdot P^2$ என்றும், இன்ன பிற நிலைகளுக்கான பரவலையும் பெறலாம் பொதுவாக $(K+n)$-ஆவது

நேரத்தில், அதாவது n அடிகளுக்குப்பின், நிகழ்தகவுப் பரவல் $p \cdot p^{n}$-க்குச் சமமாகும் என்று நிறுவலாம்.

குறிப்பு : குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இத்தேற்றத்தைப் பின் வருமாறு கூறலாம்.

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P = p^{(0)} \cdot P^{2}$$

$$p^{(3)} = p^{(2)} \cdot P = p^{(0)} \cdot P^{2}$$

... ...

... ...

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^{n}$$

9.6 ஒழுங்கு மார்கோவ் சங்கிலியின் நிலையான பரவல்

ஒரு மார்கோவின் சங்கிலிக்கான நிலைதிரிபு அணி ஒழுங்குடையதாயின், அந்த சங்கிலியும் ஒழுங்குடையது என்று கூறுகிறோம். P^{n} எனும் n-அடி நிலைதிரிபு அணிகளின் தொடர் முறை T எனும் அணியை அணுகும் என்று அறிவோம். இங்கு T-ன் நிறைகள் ஒவ்வொன்றும் P என்ற அணியின் மாற்றமற்ற நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டராக இருக்கும் என்றும் தெரியும். இதை t என்க.

ஆகையால் n போதுமான அளவு பெரிய எண்ணாக இருக்கும் போது a_j என்ற நிலையை அடைவதற்கான நிகழ்தகவு, p_{ij}-ன் மதிப்பு, முதலில் உள்ள a_i என்ற நிலையைச் சார்ந்திராமல், t-ன் பிரிவாகிய t_j-ஐ அணுகும்.

இதைப்பின்வரும் தேற்றமாகவும் கூறுவதுண்டு,

9.6-1 தேற்றம் : ஒரு மார்கோவ் சங்கிலி ஒழுங்குடையதாக இருக்குமானால், நீண்ட பல முயற்சிகளுக்குப்பின் கொடுக்கப் பட்ட தொகுதி a_j என்ற ஏதேனும் ஒரு நிலையை அடைவதற்கான நிகழ்த்தகவு ஏறக்குறைய, அச்சங்கிலியின் நிலைதிரிபு அணி P-ன் மாற்றமற்ற நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டர் t-ன் பிரிவாகிய t_j-க்குச் சமமாக இருக்கும்.

இவ்வாறு, நிலை மாற்ற அடிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகும்போது, மார்கோவ் சங்கிலியின் ஸ்டொக்காஸ்டிக் முறையில் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் ஆரம்பநிலை அல்லது அம்முறையின் முதல் நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்னர் நிகழும் நிலை மாற்றத்தை எவ்விதத்திலும் பாதிக்காது. மேலும் நிகழ்தகவுப் பரவல்களின் தொடர் முறையானது, P-ன் மாருத நிகழ்தகவு வெக்டர் t-ஐ அணுகும் இந்த மாருத நிகழ்தகவு வெக்டரை மார்கோவ் சங்கிலியின் " நிலையான பரவல் " என்று அழைப்பதுண்டு.

9·6-2 ஈர்க்கும் நிலைகள் (Absorbing States) மார்கோவ் சங்கிலியை உருவாக்கும் ஒரு தொகுதி a_i என்ற நிலையை அடைந்தவுடன் அந்நிலையிலேயே தங்கிவிடுமானுல், பின் a_i எனும் நிலை அத்தொகுதியின் ஈர்க்கும் நிலை எனப்படும். எனவே, P என்ற நிலைதிரிபு அணியின் i-ஆவது நிரையும் முக்கிய மூலைவரையும் சந்திக்கும் இடத்தில் உள்ள பதிவு ஒன்று என்றிருந்து, அந்நிரையின் ஏனைய மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யமாக இருந்தால் தான், a_i என்பது குறிப்பிட்ட தொகுதியின் ஈர்க்கும் நிலையாக இருக்க முடியும் என்று அறியலாம்.

ஒரு மார்கோவ் சங்கிலியின் நிலை திரிபு அணியை P என்க. a_i என்ற நிலை இத்தொகுதியின் ஈர்க்கும் நிலையாக இருக்கட்டும். பின் $i \neq j$ எனில், n-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் n-அடி நிலை திரிபு நிகழ்தகவு, $p_{ij}^{(n)}$-ன் மதிப்பு பூஜ்யமாக இருக்கும். எனவே P-ன் ஒவ்வொரு படி அணியிலும் குறைந்தது ஒரு பதிவாகிலும் பூஜ்யமாக இருக்கவேண்டும். அதாவது P என்பது ஒழுங்கு அணி அல்ல.

இவ்வாறு, P என்ற ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் முக்கிய மூலைவரையில் ஒருபதிவு ஒன்று என இருக்குமானுல், அந்த அணி ஒரு ஒழுங்கு அணியாக இருக்க முடியாது என்று அறிகிரோம். இம்முடிவு முக்கியமானதொன்ருகும்.

இதுவரை கூறிய வரையறைகளும், தேற்றங்களும் எளிதில் புரிவதற்காக ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்குகள்

1. ஒரு மார்கோவ் நிகழ்ச்சிக்கோவையின் நிலைதிரிபு அணி

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$ என்றும், ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$p^{(0)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், பின்வருவனவற்றை விளக்கி அவற்றின் மதிப்பைக் காண்க :

(i) $p_{12}^{(2)}$, (ii) $p_{21}^{(2)}$, (iii) $p^{(2)}$, (iv) $p_1^{(2)}$

இங்கு, $$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \; ; \; p^{(0)} = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

(i) $p_{12}^{(2)}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி a_1 என்ற நிலையிலிருந்து a_2 என்ற நிலைக்கு 2 அடிகளில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிப்பதாகும். இதன் மதிப்பை, p^2 எனும் 2-அடி நிலை திரிபு அணியிலிருந்து பெறக்கூடும்.

$$p^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

$\therefore \; p_{12}^{(2)} \; \frac{3}{8}$ என்று தெரிகிறது.

(ii) இதேபோன்று $p_{21}^{(2)}$ என்பது 2-அடிகளில் a_2 என்ற நிலையிலிருந்து a_1 என்ற நிலைக்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவாகும்.

$\therefore \quad P_{21}^{(2)} = \frac{9}{16}$ என்று கிடைக்கின்றது.

(*iii*) $p^{(2)}$ எனும் வெக்டர் இரண்டு அடிகளுக்குப் பிறகுள்ள அத்தொகுதியின் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் குறிக்கும். இந்த வெக்டரைப் பெற, முதலில் $p^{(1)}$ எனும் வெக்டரைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \left[\frac{11}{16}, \frac{5}{16}\right]$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P = \left[\frac{11}{16}, \frac{5}{16}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \left[\frac{37}{64}, \frac{27}{64}\right]$$

(*iv*) $p_1^{(2)}$ என்ற எண் $p^{(2)}$ என்ற வெக்டரின் முதல் பிரிவாகும்.

$$\therefore \quad p_1^{(2)} = \frac{37}{64}.$$

2. மேலே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கில் உள்ள அணியின் n-ஆவது படி, P^n அணுகும் அணியைக் கண்டுபிடி.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad p^{(0)} = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

P எனும் அணியின் மாற்றற்ற நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை t என்க. பின் $tP = t$ என்று தெரியும்.

$t = [x, y]$ என்றால், $x + y = 1$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad [x, y]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = [x, y]$$

$$i.e., \left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right), \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y\right)\right] = [x, y]$$

எனவே, $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = x$, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = y$ என்று கிடைக்கும்.

இவ்வாறு, $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{2}{5}$ என்று பெறலாம்.

$$\therefore \quad t = \left[\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right] = [0{\cdot}6,\ 0{\cdot}4]$$

P^n என்ற அணி அணுகும் அணியை T எனக் கொள்வோமானால், பின்

$$T = \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{\cdot}6 & 0{\cdot}5 \\ 0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 \end{bmatrix}$$ என்று அறிகிறோம்.

3. முன்பு பார்த்த எடுத்துக்காட்டு (2)-ல், முதல் நாளில் ஒரு பகடையை உருட்டிவிட்டு, அதிலிருந்து 3 என்ற இலக்கம் கிடைத்தால்தான் பேராசிரியர் கல்லூரிக்குக் காரில் செல்வார் என்று கொடுக்கப்பட்டால், அவர் ஆறு நாட்களுக்குப்பின் ஸ்கூட்டரில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

பகடையை ஒரு முறை உருட்டும்போது 3 என்ற இலக்கம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ என்று தெரியும். அதாவது முதல் நாளில் காரில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ என்று கிடைக்கின்றது. எனவே ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல்.

$$p^{o)} = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$$ என்று பெறுகிறோம்.

மேலும் இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி

$$P = \begin{array}{c} \\ C \\ S \end{array} \begin{bmatrix} C & S \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ என்பதாகும்.

ஆகையால், ஏழாவது நாளில் பேராசிரியர் ஸ்கூட்டரில் செல்வதற்கான நிகழ்தவைக் காண, $p^{(6}$ -ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும்.

இப்பொழுது

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16}, & \frac{11}{16} \end{bmatrix}$$

$$P^6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{32} & \frac{21}{32} \\ \frac{21}{64} & \frac{43}{64} \end{bmatrix}$$

ஆனால்

$p^{(6)} = p^{(0)} \cdot P^{(6)}$ என்று தெரியும்.

$\therefore \quad p^{(6)} = p^{(0)} \cdot P^{6}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}, & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{32} & \cdot & \frac{21}{32} \\ \frac{21}{64} & , & \frac{43}{64} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{127}{384}, & \frac{257}{384} \end{bmatrix}$$

இவ்வாறு தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{p^{(6)}}{S} = \frac{257}{384}$ என்று தெரிகிறது. அதாவது, ஏழாவது நாளில் ஸ்கூட்டரில் செல்வதற்கு அதிக வாய்ப்பு உள்ளது என்று அறிகிறோம்.

4. முன்னர் எடுத்துக்கொண்ட கணக்கு (3)-ல், முதல் நாளன்று பல்கலைக்கழகப் பேராசிரியர் கல்லூரி Z-க்குச் செல்வதாகக் கொண்டால், நான்கு நாட்களுக்குப்பிறகு பேராசிரியர் கல்லூரி Y-க்குச் செல்வதற்குச் சரிசம வாய்ப்பு உள்ளது என்று நிறுவுக.

இங்கு நிலைதிரிபு அணி,

$$P = \begin{matrix} \\ X \\ Y \\ Z \end{matrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

முதல் நாள் பேராசிரியர் கல்லூரி Z-க்குச் செல்வார் என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் $p^{(0)} = [0, \ 0, \ 1]$ என்று கிடைக்கும்.

$\therefore \quad p^{(1)} = p^{(0)} \cdot p$

$$= [0, 0, 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P$$

$$= \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$$

$$p^{(3)} = p^{(2)} \cdot P$$

$$= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right]$$

$$p^{(4)} = p^{(3)} \cdot P$$

$$= \left[\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{5}{16}, \frac{1}{2}, \frac{3}{16}\right]$$

$\therefore \quad p_y^{(4)} = \frac{1}{2}$ என்று தெரிகிறது

அதாவது, நான்கு நாட்களுக்குப் பிறகு பேராசிரியர் கல்லூரி Y-க்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என்றுகிறது.

5. ஒரு பகடை விளையாட்டின் போது A என்பவருக்கு கிடைக்கும் வெற்றி வாய்ப்புகள் ஒரு தொடர் முறையில் அமைகின்றன. ஒரு ஆட்டத்தில் அவருக்கு வெற்றி கிடைக்குமானால், அதற்கு அடுத்த ஆட்டத்தில் அவர் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு 0·6 என்று தெரிகிறது. ஆனால் ஏதேனும் ஒரு ஆட்டத்தில் தோல்வியுற்றால், அதற்கு அடுத்த ஆட்டத்தில் அவருக்கு தோல்வி ஏற்படுவதற்கான வாய்ப்பு 0·7 என்றிருக்கும். அவர் முதல் ஆட்டத்தில் வெற்றிபெற சரிசமவாய்ப்பு இருக்குமானால், அவர்

(i) இரண்டாவது ஆட்டத்தில் வெற்றிபெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும்,

(ii) மூன்றாவது ஆட்டத்தில் வெற்றிபெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும்,

(iii) மிகப்பல ஆட்டங்களில் எத்தனை முறை வெற்றியடைவார் என்றும் கணக்கிடு.

இங்கு வெற்றி, தோல்வி என்ற இரண்டு நிலைகள்தான் உள்ளன. இவற்றை முறையே S, F என்று குறிப்பிடுவோமானால், இந்நிகழ்ச்சிக் கோவையின் ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி P-ஐ கீழே உள்ளவாறு அமைக்கலாம்.

$$P = \begin{array}{c} \\ S \\ F \end{array} \begin{bmatrix} S & F \\ 0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 \\ 0{\cdot}3 & 0{\cdot}7 \end{bmatrix}$$

மேலும் A என்பவர் முதல்வெற்றிபெற சரிசமவாய்ப்பு உண்டு எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$p^{(0)} = [\ 0{\cdot}5, \quad 0{\cdot}5\ ]$ என்று அறிகிறோம்.

(i) $p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P = [\,0{\cdot}5,\ \ 0{\cdot}5\,] \begin{bmatrix} 0{\cdot}6 & 0{\cdot}3 \\ 0{\cdot}3 & 0{\cdot}7 \end{bmatrix}$

$= [\,0{\cdot}45,\ \ 0{\cdot}55\,]$

$\therefore\ \ p_s^{(1)} = 0{\cdot}45$

அதாவது, இரண்டாவது ஆட்டத்தில் வெற்றிபெற வாய்ப்பு 45 சதவீதம் உள்ளது என்று அறிகிறோம்.

(ii) $111^{rly}\ p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P = [\,0{\cdot}45,\ \ 0{\cdot}55\,] \begin{bmatrix} 0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 \\ 0{\cdot}3 & 0{\cdot}7 \end{bmatrix}$

$= [\,0{\cdot}435,\ \ 0{\cdot}565\,]$

$\therefore\ \ p_s^{(2)} = 0{\cdot}435$

எனவே மூன்றுவது ஆட்டத்தில் A-ன் வெற்றி வாய்ப்பு 43·5 சதவீதமாகும்.

(iii) அணி P-ன் மாற்றற்ற நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை $t = [x, y]$ எனக்கொள்வோம். பின் $x + y = 1$ என்றும், $t\,P = t$ என்றும் தெரியும்.

$\therefore\ \ [x,\ y] \begin{bmatrix} 0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 \\ 0{\cdot}3 & 0{\cdot}7 \end{bmatrix} = [x,\ y]$ என்றுகும்.

அதாவது, $[\,(0{\cdot}6x + 0{\cdot}3y),\ (0{\cdot}4x + 0{\cdot}7y)\,] = [x,\ y]$

எனவே $0{\cdot}6x + 0{\cdot}3y = x,\quad 0{\cdot}4x + 0{\cdot}7y = y$ என்று கிடைக்கும்.

இவற்றிலிருந்து $x = \dfrac{3}{7},\ y = \dfrac{4}{7}$ என்று பெறக்கூடும்.

$\therefore\ \ t = \left[\dfrac{3}{7},\ \dfrac{4}{7}\right]$

எனவே மிகப்பல ஆட்டங்களுள் $\dfrac{3}{7}$ பங்கு ஆட்டங்கள் A-க்கு வெற்றியைத்தரும்.

6. ஒரு மார்கோவ் நிகழ்ச்சிக்கோவைக்கான நிலை திரிபு அணி,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$ என்றும், ஆரம்ப நிலைக்கான

நிகழ்தகவுப் பரவல், $p^{(0)} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]$ என்றும் கொடுக்கப் பட்டால் பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க :—

(i) $p_{13}^{(2)}$, (ii) $p_{23}^{(2)}$, (iii) $p^{(2)}$ (iv) மேலும் P^n-ன் எல்லை மதிப்பையும் கண்டுபிடி.

$$P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

ஆனால் $P^{(2)} = P^2$ என்று தெரியும்.

$\therefore$ (i) $p_{13}^{(2)} = \frac{3}{8}$; (ii) $p_{23}^{(2)} = \frac{1}{2}$ என்று அறியலாம்.

(iii) அடுத்து, $p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$$= \left[\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right]$$

111^{rly} $p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P = \left[\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$$= \left[\frac{7}{16}, \frac{1}{8}, \frac{7}{16}\right]$$

(iv) கொடுக்கப்பட்ட அணியின் மாற்றற்ற நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை $t = [x, y, z] =$ எனக்கொள்வோம். பின் $x + y + z = 1$ என்றாகும். மேலும் $tP = t$ என்றிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \; [x, y, z] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = [x, y, z]$$

இதிலிருந்து பின்வரும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$$\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{4}z = x; \; y = \frac{1}{2}z; \; \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}z = z$$

ஆகையால், $x = \frac{3}{2}z$, $y = \frac{1}{2}z$ என்று பெறலாம்.

ஆனால், $x + y + z = 1$

அதாவது, $\frac{3}{2}z + \frac{1}{2}z + z = 1; \quad 3z = 1; \quad \therefore \quad z = \frac{1}{3}$

எனவே $x = \frac{3}{2}z = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}z = \frac{1}{6}$

இவ்வாறு $t = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$

P^n எனும் அணியின் எல்லை மதிப்பை T என்ற அணியாகக் கொண்டால் பின்,

$$T = \begin{bmatrix} x, & y, & z \\ x, & y, & z \\ x, & y, & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

என்று அறிகிறோம்.

7. மதுரை நகரில் உள்ள பெருந்தனக்காரர் ஒருவர் ஒவ்வொரு ஆண்டும் தன்னிடமுள்ள காரை விற்றுவிட்டு, அதற்குப்பதிலாக ஒரு புதிய கார் வாங்குவது வழக்கம். ஏதேனும் ஒரு ஆண்டில் அவர் பியட் கார் வைத்திருந்தால், அதற்கு அடுத்த ஆண்டு அவர் ஒரு ஸ்டாண்டர்டு கார் வாங்குவார். ஸ்டாண்டர்டு கார் வைத்திருந்த மறு வருடம் ஒரு அம்பாஸடர் கார் வாங்குவார். ஆனால் ஒரு ஆண்டில் அம்பாஸடர் கார் வைத்திருந்தால்;

அதற்கு அடுத்த ஆண்டும் அம்பாஸடர் கார் வாங்குவதற்கும், பியட் அல்லது ஸ்டாண்டர்டு கார் வாங்குவதற்கும் சம வாய்ப்புகள் உண்டு. முதன் முதலாக 1967-ம் ஆண்டு அவர் ஒரு அம்பாஸடர் கார் வாங்கினார் என்றால், பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடி.

(*i*) 1969-ம் ஆண்டு ஒரு பியட் கார் வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவு.

(*ii*) 1969-லும் ஒரு அம்பாஸடர் கார் வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவு.

(*iii*) 1970-ம் ஆண்டில் ஒரு ஸ்டாண்டர்டு கார் வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவு.

(*iv*) 1970-ல் ஒரு அம்பாஸடர் கார் வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவு

மேலும் மிகப்பல ஆண்டுகளில் எத்தனை ஆண்டுகள் அவர் அம்பாஸடர் கார் வைத்திருப்பார்?

அம்பாஸடர், பியட், ஸ்டாண்டர்டு என்ற கார்களை பெருந்தனக்காரர் வைத்திருக்கும் நிகழ்ச்சிகளை முறையே A, F, S என்று குறிப்பிடுவோம். ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிக் கோவைக்கான நிலைவெளி $\{A, F, S\}$ என்றாகும்.

மேலும் முதல் ஆண்டில் அவர் வைத்துள்ள காரின் வகையைப் பொறுத்துத்தான், அடுத்த ஆண்டில் அவர் எந்த மாதிரி கார் வாங்குவார் என்று அறிய முடியும். எனவே இந்நிகழ்ச்சிகள் ஒரு மார்கோவின் சங்கிலியை உருவாக்கும் என்று அறிகிறோம்.

இந்நிகழ்ச்சிக் கோவையின் நிலைதிரிபு அணி P எனில், பின்

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ F \\ S \end{array} \begin{bmatrix} A & F & S \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்று பெற முடியும்.

மேலும் முதன் முதலில் அவர் 1967-ம் ஆண்டு ஒரு அம்பாஸடர் கார் வாங்கினார் என்று தெரிவதால், ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$p^{(0)} = [1, \quad 0, \quad 0]$ என்றிருக்க வேண்டும்.

1969-ம் ஆண்டில் அவர் எந்த மாதிரி கார் வாங்குவார் என்பதை நிர்ணயிக்க வேண்டுமானால், நமக்கு $p^{(2)}$ -ன் மதிப்பு தெரிந்திருக்க வேண்டும். இதேபோன்று 1970-ம் ஆண்டு வாங்கக் கூடிய காரின் மாதிரியை அறிய, $p^{(3)}$ -ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும், இப்பொழுது,

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P$$

$$= [1, 0, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

இனி $p^{(2)} = p^{(1)} \cdot p$

$$= \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right]$$

$$p^{(3)} = p^{(2)} \cdot p$$

$$= \left[\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{16}{27}, \frac{4}{27}, \frac{7}{27}\right]$$

எனவே,

(i) 1969-ம் ஆண்டு பியட்கார் வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= p_F^{(2)} = \frac{1}{9}$$

(ii) 1969-ம் ஆண்டு அம்பாஸடர் கார் வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவு $= p_A^{(2)} = \frac{4}{9}$

(iii) 1970-ம் ஆண்டு ஸ்டாண்டர்டு கார் வாங்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= p_S^{(3)} = \frac{7}{27}$

(iv) 1070-ம் ஆண்டு அம்பாஸடர் கார் வாங்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= p_A^{(3)} = \frac{16}{27}$

அடுத்து; மிகப்பல ஆண்டுகளுள், அம்பாஸடர் கார் எத்தனை ஆண்டுகள் வைத்திருப்பார் என்பதை அறிய, $^{(0)} \cdot p^n$ அணுகும் நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரைக் கணக்கிட வேண்டும். இந்த வெக்டரை $t = [x, y, z]$ எனக் கொள்வோம் பின் $x + y + z = 1$ என்றும்.

$tP = t$ என்றும் நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore \quad [x, y, z] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x, y, z]$$

எனவே,

$\frac{1}{3}x + z = x, \frac{1}{3}x = y, \frac{1}{3}x + y = z$ என்று கிடைக்கும். இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண,

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{6}, z = \frac{1}{3}$ என்று பெறலாம்.

இவ்வாறு, $t = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ என்று அறிகிறோம்.

ஆகையால் மிகப் பல ஆண்டுகளுள், சரிபாதி ஆண்டுகள் அவர் அம்பாஸடர் கார் வைத்திருப்பார் என்று தெரிகிறது.

8. ஒரு பையில் 2 பச்சைப் பந்துகளும், மற்றொரு பையில் 4 சிவப்புப் பந்துகளும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு விளையாட்டின் போது, ஒரு பையிலிருந்து ஒவ்வொரு முறையும் எடுக்கப்படும் பந்து ஒன்று இரண்டாவது பையில் வைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு தொடர்ந்து நடைபெறும் நிகழ்ச்சித் தொகுதியில், குறிப்பிட்ட நேரத்தில் முதல் பையில் உள்ள சிவப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை r என்றிருப்பதை a_r எனும் நிலை குறிப்பதாகக் கொண்டு,

(*i*) இத்தொகுதி உருவாக்கும் மார்கோவ் சங்கிலியின் நிகழ் திரிபு அணியையும்

(*ii*) மூன்று நிலை மாற்றங்களுக்குப்பின் முதல் பையில் இரண்டு சிவப்புப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவையும்,

(*iii*) மிகப் பல நிலை மாற்றங்களுக்குப்பின் முதல் பையில் இரண்டு சிவப்புப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவையும் கண்டுபிடி.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி பின்வரும் a_0, a_1, a_2 என்ற மூன்று நிலைகளில் தான் இருக்க முடியும்

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு பைகளையும் முறையே A, B என்றும், பச்சைப் பந்துகளை G என்றும், சிவப்புப் பந்துகளை R என்றும், குறிப்பிடுவோம்.

நிலைகள்	a_0		a_1		a_2	
பைகள்	A	B	A	B	A	B
பந்துகளின் எண்ணிக்கை	G—2 —	R—4 —	G—1 R—1	G—1 R—3	— R—2	G—2 R—2

இங்கு a_0 என்ற நிலை ஆரம்ப நிலையைக் குறிக்கின்றது. a_0 எனும் நிலையிலிருந்து a_1-என்ற நிலையைப் பெற A என்ற பையிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்தையும், B-யிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தையும் எடுத்து, அவை பைகளில் மாற்றி வைக்கப்படுகின்றன. இதேபோன்று a_1-லிருந்து, a_2 என்ற நிலையைப் பெற, பை A-யிலிருந்து ஒரு பச்சைப் பந்தையும், பை B-யிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தையும் எடுத்து, அவற்றை இரண்டு பைகளிலும் மாற்றிவைக்கப்படுகின்றன. இம் மாதிரியே, a_1-லிருந்து a_0 என்ற நிலையையும் பெற முடியும்.

(*i*) மேலும், a_0 என்ற நிலையிலிருந்து a_1-ஐத் தான் பெற முடியுமே தவிர வேறு எந்த நிலையையும் பெற முடியாது என்பது உறுதியாதலின், இதற்குரிய நிகழ்தகவு ஒன்றாகும். ஆகையால், இந்நிகழ்ச்சிக் கோவையின் நிலை திரிபு அணி P எனில், P-ன் முதல் நிரை $[0, 1, 0]$ என்ற வெக்டராகும்.

ஆனால் a_1 எனும் நிலையிலிருந்து a_2 அல்லது a_0 என்ற இரண்டு நிலைகளுள் ஏதேனும் ஒன்றைப் பெற முடியும். a_1-லிருந்து a_2 என்ற நிலையைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$-க்குச் சமமாகும். a_1-லிருந்து a_0 எனும் நிலையை அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$ -க்குச் சமமாகும்.

எனவே அணி P-ன் இரண்டாவது நிரை

$$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right]$$ எனும் வெக்டராகும்.

ஒவ்வொரு பையிலிருந்தும், ஒரு சமயத்தில் ஒரே ஒரு பந்தை எடுத்து மாற்றி வைக்க வேண்டுமாதலின், a_2 என்ற நிலையிலிருந்து a_1-க்குச் செல்ல முடியுமே தவிர, வேறு நிலைக்குச் செல்ல முடியாது, a_2-லிருந்து a_1-ஐப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\left(\frac{2}{2} \quad \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ஆகும்,

மேலும் a_2 என்ற நிலையில், பை A-யிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தையும், பை B-யிலிருந்தும் ஒரு சிவப்புப் பந்தையும் எடுத்து அவற்றை மாற்றி வைக்க a_2 என்ற நிலைதான் திரும்பக் கிடைக்கும்.

இந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவும் $\frac{1}{2}$ என்று அறியலாம், எனவே P-ன் மூன்றுவது நிரை $\left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ என்பதாகும்.

இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் நிலைதிரிபு அணி

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ என்று கிடைக்கும்.

(*ii*) கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிக் கோவையின் ஆரம்ப நிலை a_0 என்றிருப்பதால், இதற்குரிய நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$p^{(0)} = [1, 0, 0]$ என்பதாகும்.

$$\therefore \quad p^{(1)} = p^{(0)} P = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= [0, 1, 0]$$

$$111^{rly}\ p^{(2)} = p^{[1[} \cdot P = [0, 1, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right]$$

$$p^{(3)} = p^{(2)} \cdot P = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}\right]$$

ஆகையால் மூன்று நிலை மாற்றங்களுக்குப்பின், A என்ற பையில் 2 சிவப்புப் பந்துகள் இருப்பதற்கான, அதாவது a_3 என்ற நிலையை அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{8}$ என்று, $p^{(3)}$ எனும் வெக்டரிலிருந்து அறியலாம்.

(iii) P^n-ன் எல்லை மதிப்பைப் பெற P-ன் நிலையான நிகழ் தகவு வெக்டரை கண்டறிய வேண்டும். இந்த வெக்டரை $t = [x, y, z]$ என்க.

பின் $x + y + z = 1$; மேலும் $tP = t$ என்றும் தெரியும்.

$$\therefore \quad [x, y, z] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [x, y, z]$$

எனவே, $\frac{1}{8}y = x$; $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = y$; $\frac{3}{8}y + \frac{1}{2}z = z$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து, $x = \frac{1}{15}, y = \frac{8}{15}, z = \frac{6}{15}$ என்று தீர்வு காண்கிறோம்.

இவ்வாறு $t = \left[\frac{1}{15}, \frac{8}{15}, \frac{6}{15}\right]$ என்று அறிகிறோம்

ஆகையால், நீண்ட பல முயற்சிகளுக்குப் பின், a_2 என்ற நிலையை அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{5}$ என்று அறிகிறோம். அதாவது ஐந்து விளையாட்டுகளுள் இரண்டில் வெற்றி அடைய முடியும்.

9. சீட்டாட்டத்தில் கலந்துகொள்வதற்காக ஒருவர் மூன்று ரூபாய் எடுத்துச் செல்கிறார். ஒவ்வொரு ஆட்டத்தின் முடிவிலும் அவர் வெற்றி பெற்றால் அவருக்கு இரண்டு ரூபாய்கள் லாபம் கிடைக்கும்; ஆனால் அவர் தோல்வியடைந்தால் ஒரு ரூபாய்தான் இழக்க நேரிடும். அவர் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ என்றும், தோல்வியடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும், தன்னிடமுள்ள மூன்று ரூபாய்களையும் இழந்த பின்னரோ, அல்லது வெற்றி பெறுவதன் மூலம் குறைந்தது மூன்று ரூபாய்கள் லாபம் அடைந்த பின்னரோ, அவர் விளையாடுவதில்லை. இந்த தொடர் நிகழ்ச்சியைக் குறிப்பிட ஒரு மார்கோவ் சங்கிலியை அமைக்கவும். மேலும் விளையாட்டு முடிவடைவதற்கு முன் குறைந்தது நான்கு ஆட்டங்கள் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும் கண்டுபிடி.

சீட்டாடும் ஒருவரிடம் ஆறு ரூபாய்கள் கிடைத்த பின்னரோ, அல்லது அவரிடம் உள்ள பணம் முழுவதையும் இழந்த பின்னரோ ஆட்டம் முடிவடைந்து விடுவதால், இந்த நிகழ்ச்சிக் கோவை ஈர்க்கும் தடங்கல்களையுடைய இயைபிலா நடையைப் போன்றதொன்றாகும்.

இங்கு, விளையாடுபவரிடம் உள்ள பணம் r ரூபாய்கள் என்பதை a_r என்ற நிலை குறிப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொகுதிக்கான நிலைவெளி,

$\{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6\}$ என்றாகும்.

மேலும் இந்நிகழ்ச்சிக்கோவையின் நிலைதிரிபு அணி P எனில்,

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

இதில் a_0, a_6 என்பன ஈர்க்கும் நிலைகள் என்று அறியலாம். விளையாட்டின் ஆரம்பத்தில் விளையாடுபவரிடம் ரூ. 3 இருப்பதால் ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$p^{(0)} = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$$ என்று தெரிகிறது.

விளையாட்டு முடிவடைய குறைந்தது 4 ஆட்டங்கள் நடைபெற வேண்டுமாதலின், மூன்று ஆட்டங்களுக்குமேல் விளையாடியிருக்க வேண்டும் என்று அறிகிறோம். அதாவது மூன்று அடிகளுக்குப் பின் (அதாவது, நிலைமாற்றங்களுக்குப் பின்) கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி a_0 என்ற நிலையிலோ அல்லது a_6 என்ற நிலையிலோ இருக்க முடியாது என்று பொருளாகும். எனவே, இத்தொகுதி, மூன்று அடிகளுக்குப் பின், a_1, a_3, a_2, a_4, a_5 என்ற நிலைகளுள் ஏதேனும் ஒன்றில் இருத்தல் வேண்டும்,

இதற்குரிய நிகழ்தகவைப் பெற, $p^{(3)}$ எனும் வெக்டரைக் காண வேண்டும்.

இப்பொழுது, $p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P$

$$= [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[0, 0, \frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0\right]$$

இதேபோன்று,

$p^{(2)} = \left[0, \frac{9}{16}, 0, 0, \frac{3}{8}, 0, \frac{1}{16}\right]$ என்றும்,

$p^{(3)} = \left[\frac{27}{64}, 0, 0, \frac{27}{64}, 0, 0, \frac{5}{32}\right]$ என்றும் கிடைக்கும்.

எனவே தேவையான நிகழ்தகவு

$$= p_1^{(3)} + p_2^{(3)} + p_3^{(3)} + p_4^{(3)} + p_5^{(3)}$$

$$= 0 + 0 + \frac{27}{64} + 0 + 0$$

$$= \frac{27}{64}$$

10 ஒன்றன்பின் ஒன்ருக தொடர்ந்து 3 பூக்கள் கிடைக்கும் வரை சமச்சீரான நாணயம் ஒன்று சுண்டப்படுகிறது. X_n என்பது n-ஆவது முயற்சியோடு முடிவடையும் தொடர் முறையின் நீளத்தைக் குறிக்குமாளுல், குறைந்தது எட்டு முறை நாணயத்தைச் சுண்டிவிடுவதற்கான நிகழ்தகவு என்பதைக் கண்டுபிடி.

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் தொடர் முறையின் நிலை வெளியை $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ எனக் கொள்வோம். இங்கு a_r எனும் நிலை, வரிசையாக r பூக்கள் தொடர்ந்து கிடைப்பதைக் குறிக்கும். மேலும் n முயற்சிகளின்போது, $(n-K)$-ஆவது முயற்சியில் கடைசி தோல்வி ஏற்பட்டால், $X_n=K$ என எடுத்துக் கொள்வோம். (இங்கு கடைசி தோல்வி என்பது இறுதியாக தலை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்). அதாவது n-ஆவது முயற்சியோடு முடிவடையும் அதிகமாக கிடைக்கக் கூடிய பூக்களின் எண்ணிக்கையை X_n குறிக்கின்றது என்று பொருளாகும். இந்த நிகழ்ச்சி முறைக்கான மார்கோவ் சங்கிலியில் a_K என்ற நிலையிலிருந்து a_0 என்ற நிலைக்கோ அல்லது a_{K+1} என்ற நிலைக்கோ செல்ல முடியுமே தவிர வேறு நிலை மாற்றம் ஏற்பட முடியாது

ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டும்போது பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $p = \frac{1}{2}$ என்று தெரியும் $\left(\therefore\ q = 1 - p = \frac{1}{2}\right)$ எனவே இந்நிகழ்ச்சிக் கோவையின் நிலை திரிபு அணி.

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ என்று கிடைக்கும்.

ஒன்றன்பின் ஒன்ருக 2 பூக்கள் தொடர்ந்து கிடைத்தவுடன் விளையாட்டு முடிவு பெறுமாதலால், கடைசி நிரையில் நான்காவது

மூலகம் ஒன்று எனவும், ஏனைய மூலகங்கள் பூஜ்யமாகவும் உள்ளன. அதாவது a_8 என்பது ஒரு ஈர்க்கும் நிலை என்று விளங்கும்.

இந் நிகழ்ச்சி முறையில். முதல் முறை நாணயத்தைச் சுண்டும் போது தோல்வியடைதல் (அதாவது வரிசையாக பூக்கள் மூன்று கிடைக்காமலிருந்தால்) உறுதியாதலின், ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$p^{(0)} = [1, \ 0, \ 0, \ 0]$ என்ற வெக்டராகும்.

வெற்றி கிடைப்பதற்கு முன், குறைந்தது எட்டு முறை கொடுக்கப்பட்ட நாணயத்தைச் சுண்டி விடுவதற்கான நிகழ்தகவைப் பெற $p^{(7)}$ என்ற ஏழு - அடி - நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காணுதல் வேண்டும்.

இப்பொழுது,

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P$$

$$= [1, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right]$$

இதேபோன்று,

$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right]$$

$$p^{(3)} = p^{(2)} \cdot P = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$$

$$p^{(4)} = p^{(3)} \cdot P = \left[\frac{7}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right]$$

$$p^{(5)} = p^{(4)} \cdot P = \left[\frac{13}{32}, \frac{7}{32}, \frac{1}{8}, \frac{4}{16}\right]$$

$$p^{(6)} = p^{(5)} \cdot P = \left[\frac{24}{64}, \frac{13}{64}, \frac{7}{64}, \frac{5}{16}\right]$$

$$p^{(7)} = p^{(6)} \cdot P = \left[\frac{44}{128}, \frac{24}{128}, \frac{13}{128}, \frac{47}{128}\right]$$

ஆட்டம் முடிவுபெற குறைந்தது 8 முயற்சிகள் தேவை என்பதால், 7-ஆவது முயற்சியின் போது வெற்றிபெற முடியாது. அதாவது ஏழாவது முயற்சியில் a_8 என்ற நிலையை அடைய முடியாது என்று பொருளாகும். ஆகையால் ஏழாவது முயற்சியில் a_0, a_1, a_2, என்ற நிலைகளில் ஏதேனும் ஒன்றில்தான் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி இருக்கவேண்டும்.

எனவே தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{44}{128} + \frac{24}{128} + \frac{13}{128}$

$= \frac{81}{128}$ என்று கிடைக்கும்.

குறிப்பு : எடுத்துக்காட்டுகள் (9), (10) ஈர்க்கும் நிலைகளை குறிப்பன என்று அறியலாம். (9)-ல் a_0, a_6 என்று இரண்டு ஈர்க்கும் நிலைகள் உண்டு என்றும், (10)-ல் a_8 என்று ஒரு ஈர்க்கும் நிலைதான் உண்டு என்றும் கண்டு கொள்ளலாம்.

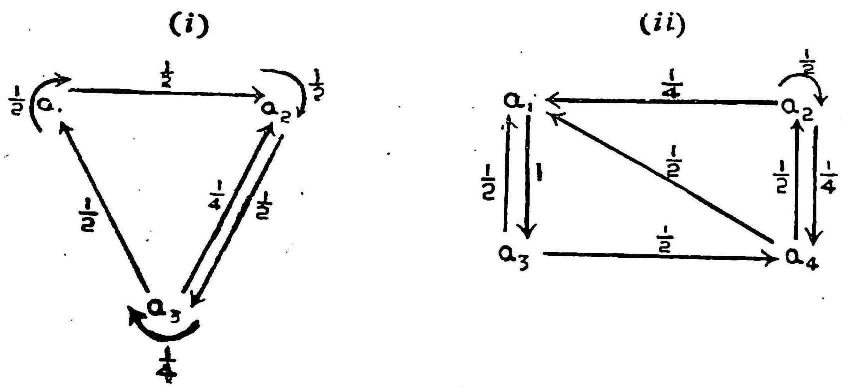
9·6-3 நிலை திரிபு வரைபடம்: ஒரு மார்கோவ் சங்கிலியின் நிலைதிரிபு நிகழ்தகவுகளை வரைபடம் மூலமும் குறிப்பிட முடியும். இத்தகைப் படங்களை நிலைதிரிபு வரைபடங்கள் என்று கூறுவர். இப்படத்தில் p_{ij} என்ற நிகழ்தகவை, a_i என்ற நிலையிலிருந்து a_j எனும் நிலைக்கு வரையப்படும் அம்புக்குறியின் மூலம் குறிப்பிடுகிறோம்

நிலைதிரிபு வரை படத்திலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் நிலைதிரிபு அணியை அமைக்கப் பின்வரும் முறையை பின்பற்ற வேண்டும்.

a_i என்ற நிலையிலிருந்து ஏனைய நிலைகளுக்கு வரையப் பட்டுள்ள அம்புக் குறிகளின் மீது குறிப்பிடப்பட்டுள்ள எண்கள், நிலைதிரிபு அணியின் i-ஆவது நிரையை நிர்ணயிக்கும். அதாவது a_i என்ற நிலையிலிருந்து a_j-க்கு வரையப்பட்டுள்ள அம்புக்குறியின் மீது குறிப்பிடப்பட்டுள்ள எண், i-ஆவது நிரையின் j-ஆவது பிரிவாகும். a_i-யிலிருந்து a_j-க்கு அம்புக்குறி இல்லாவிடில், p_{ij}-ன் மதிப்பு பூஜ்யம் எனக் கொள்ளவேண்டும்.

இம்முறை பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகளில் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளன.

1: பின்வரும் வரைபடங்களால் குறிப்பிடப்படும் நிலைதிரிபு அணிகளை நிர்ணயிக்கவும்.



படம் 20.

(*i*) இந்த வரை படத்தினால் குறிப்பிடப்படும் நிகழ்ச்சிக் கோவைத் தொகுதியில் மூன்று நிலைகள் உள்ளன. அதாவது தொகுதியின் நிலை வெளி $\{ a_1, a_2, a_3 \}$ என்பதாகும். இத் தொகுதியின் நிலைதிரிபு அணி P எனில்

$$\text{பின்},\ P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

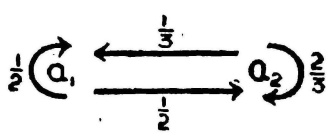
(*ii*) இங்கு கொடுக்கப்பட்ட தொகுதிக்கு 4 நிலைகள் உள்ளன. அதாவது, இத்தொகுதியின் நிலைவெளி $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ என்பதாகும்.

எனவே தொகுதியின் நிலைதிரிபு அணி பின்வருமாறு :

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலைதிரிபு அணிகளைக் குறிக்கும் வரை படங்களை வரையவும்.

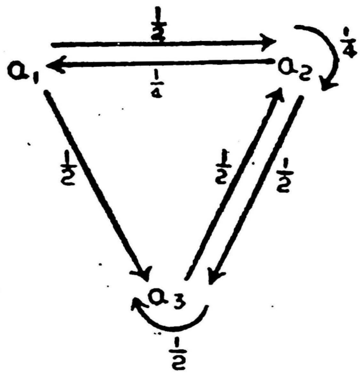
$$(i)\quad P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (ii)\quad P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$



படம் 21.

(*i*) இங்கு a_1, a_2 என்ற இரண்டு நிலைகள் இருக்கின்றன. இத்தொகுதியின் நிலைதிரிபு வரைபடம் பின்வருமாறு அமையும்.

(*ii*) இந்த அணியினால் குறிப்பிடப்படும் நிகழ்ச்சிக் கோவைத் தொகுதியில் மூன்று நிலைகள் உள்ளன. இதன் நிலை திரிபு வரைபடம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 22.

பயிற்சி 8.

1. பின்வரும் வெக்டர்களில் நிகழ்தகவு வெக்டர்கள் எவை என்று கண்டுபிடி.

(*i*) $\left[1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right]$, (*ii*) $\left[\frac{3}{4},\ 0,\ \frac{-1}{4},\ \frac{1}{2}\right]$,

(*iii*) $\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{2}\right]$ (*iv*) $\left[\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4}\right]$,

(*v*) $\left[0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2}\right]$, (*vi*) [0, 1, 0, 0] [விடை, (*iii*),(*vi*)]

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றுள் எவை ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிகள் என்று கண்டுபிடி.

(*i*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (*ii*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$(iii)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iv)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (v)\begin{bmatrix} \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (vi)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

[விடை : (iii), (vi)]

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ எனும் மூன்று அணிகளுள் ஒழுங்கு அணி

எது என்று காண்க. [விடை : (i)]

4. பின் வரும் ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிகளின் மாற்றற்ற நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டர்களை நிர்ணயிக்கவும்.

$$(i)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (ii)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iii)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(iv)\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (v)\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(vi)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

[விடை : $(i)\ \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$; $(ii)\ \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right]$

(iii) $\left[\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right]$, (iv) $\left[\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11}\right]$

(v) $\left[\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right]$, (vi) $\left[\frac{8}{20}, \frac{9}{10}, \frac{3}{20}\right]$

5. $P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்றும்,

$t = [x\ y\ z]$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டர் என்றும் கொடுக்கப்படின் tP எனும் வெக்டரும் ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டர் என்று நிறுவுக.

6. $t = [b, a]$ என்ற வெக்டர், $P = \begin{bmatrix} 1-a, & a \\ b, & 1-b \end{bmatrix}$ என்ற பொது ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் ஒரு நிலையான புள்ளி என்று காட்டு. இந்த முடிவைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் அணிகளின் நிலையான புள்ளிகளைக் (நிகழ்தகவு வெக்டர்களை) காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0{\cdot}7 & 0{\cdot}3 \\ 0{\cdot}8 & 0{\cdot}2 \end{bmatrix}$

[விடை : (i) $\left[\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right]$ (ii) $\left[\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right]$ (iii) $\left[\frac{8}{11}, \frac{3}{11}\right]$

7. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ எனும் நிலைதிரிபு அணியினால் குறிப்

பிடப்படும் தொகுதியின் ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் $p^{(0)} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ எனில், பின்வருவனவற்றின் விளக்கங்களைக் கூறி, அவற்றின் மதிப்புகளையும் கண்டுபிடி.

(i) $p_{21}^{(3)}$, (ii) $p^{(3)}$, (iii) $p_2^{(3)}$

[விடை : (i) $\frac{7}{8}$, (ii) $\left[\frac{11}{12}, \frac{1}{12}\right]$ (iii) $\frac{1}{12}$]

8. ஒரு நிகழ்ச்சிக் கோவையின் நிலைதிரிபு அணி,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

என்றும், ஆரம்ப நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல், $p^{(0)} = \left[\frac{2}{3}\ 0\ \frac{1}{3}\right]$ என்றும் இருந்தால், பின் (i) $p_{33}^{(2)}$, (ii) $p_3^{(4)}$,

(iii) $p^{(0)} \cdot P^n$ எனும் வெக்டரின் எல்லை மதிப்பு (iv) P^n என்ற அணி அணுகும் அணி ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி.

[விடை : (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\left[\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right]$

$$\text{(iv)} \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

9. ஒரு மாணவர் ஏதேனும் ஒரு நாள் காலையில் தன்னுடைய பாடங்களைப்படித்தால், அதற்கு அடுத்த நாள் காலையில் அவர் படிக்கமாட்டார் என்று 70% நிச்சயமாகக் கூறமுடியும். ஆனால், ஏதேனும் ஒரு நாள் காலையில் அம்மாணவர் பாடங்களை படிக்காமல் இருந்தால், அதற்கு அடுத்த நாள் காலையிலும் படிக்கமட்டார் என்று 60% நிச்சியமாகக் கூறலாம். மிகப்பல நாட்களுள், அவர் எவ்வளவு நாட்கள் காலையில் படிப்பார் என்று கணக்கிடு.

[விடை : $\frac{4}{11}$ நாட்கள்.]

10. மருந்துகள் தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்றின் விளம்பர அதிகாரி ஒருவர் A, B, C எனும் மூன்று முக்கிய நகரங்களுக்குச் சென்று, விளம்பரங்களின் மூலம் மருந்துகளின் விற்பனையை அதிகரிக்கச் செய்து வருவார். அவர் தொடர்ந்து இரண்டு நாட்கள் ஒரே நகரத்தில் தங்குவது இல்லை. ஏதேனும் ஒரு நாள் A என்ற நகருக்குச் சென்றால், அதற்கு அடுத்த நாள் அவர் B எனும் நகருக்குச் செல்வார். ஆனால் B அல்லது C என்ற நகருக்குச் சென்ற மறுநாள், A என்ற நகருக்குச் செல்வதற்கான வாய்ப்பு முறையே C அல்லது B என்ற நகருக்குச் செல்வதற்கான வாய்ப்பைப்போன்று இரண்டு மடங்காகும். மிகப்பல நாட்களை எடுத்துக்கொண்டால், ஒவ்வொரு நகரத்திலும் எத்தனை நாட்கள் இருப்பார் என்று கணக்கிடு. [விடை : 40%, 45%, 15%]

11. A, B என்ற இரண்டு பைகளுள் முதல் பையில் இரண்டு சிவப்புப் பந்துகளும், இரண்டாவது பையில் மூன்று கருப்புப் பந்துகளும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அப்பைகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒவ்வொரு முறையும், ஒரு பந்தை எடுத்து மற்றொரு பையில் மாற்றி வைக்கப்படுகிறது. இத்தகைய நிகழ்ச்சியின் போது, a_i எனும் நிலை A எனும் பையில் இருக்கக்கூடிய கருப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை i என்றிருப்பதைக் குறிக்கும் எனக்கொண்டு, இந்நிகழ்ச்சிக் கோவையின் நிகழ்தகவு அணியைக் கண்டுபிடி. மேலும் மூன்று அடிகளுக்குப்பின் A என்ற பையில் இரண்டு கருப்புப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவையும், இவ்வாறு நடைபெறும் மிகப்பல முயற்சிகளில் A என்ற பையில் இரண்டு கருப்புப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவையும் கணக்கிடு.

விடை : (i) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{5}{18}$, (iii) 0·3

12. மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கில், A என்ற பையில் 3 சிவப்புப் பந்துகளும், B என்ற பையில் 3 கருப்புப் பந்துகளும் இருந்தால் இந்த நிகழ்ச்சிக் கோவையின் நிலைதிரிபு அணியைக் காண்க. மிகப்பல முயற்சிகளில் A எனும் பையில் 2 கருப்புப் பந்துகள் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

விடை : (i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{9}{20}$

13. ஒரு சமச்சீரான பகடையை தொடர்ந்து சுண்டிவிடும் நிகழ்ச்சியின்போது முதல் n முயற்சிகளில் கிடைக்கப்பெறும் எண்களில் மீப்பெரிய எண்ணை X_n குறிப்பதாகக் கொண்டு, இத்தொடர்முறை நிகழ்ச்சி ஒரு மார்கோவ் சங்கிலியை உருவாக்கும் என்று காட்டு. மேலும் இத்தொகுதியின் நிலைதிரிபு அணியையும்; $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ என்ற நிகழ்தகவுப் பரவல்களையும் கண்டுபிடி.

விடை : (i) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $p^{(1)} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

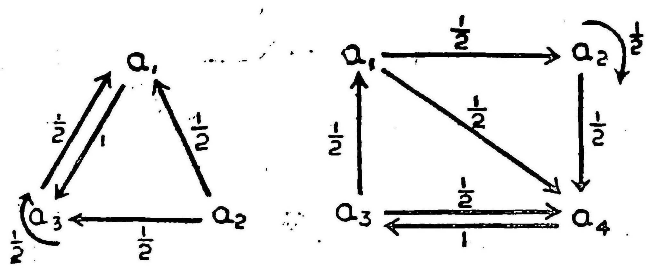
(iii) $p^{(2)} = \left(\frac{1}{36}, \frac{3}{36}, \frac{5}{36}, \frac{7}{36}, \frac{9}{36}, \frac{11}{36}\right)$

14. இரண்டு பையன்களும், இரண்டு பெண்களும் ஒரு பந்தை எறிந்து பிடித்து விளையாடும் நிகழ்ச்சியில், ஒவ்வொரு பையனும் மற்றொரு பையனிடம் பந்தை எறிவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என்றும், ஒவ்வொரு பையனும் ஒரு பெண்ணிடம் பந்தை எறிவதற்கு நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆனால் எந்த பெண்ணும், மற்றொரு பெண்ணிடம் பந்தை எறிவதில்லை ; ஒவ்வொரு பெண்ணும் ஒரு பையனிடம் பந்தை எறிவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என்றுள்ளது. இந்த தொடர் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும் மார்கோவ் சங்கிலியை நிர்ணயிக்கவும். இந்த விளையாட்டு தொடர்ந்து நீண்ட நேரம் நடைபெறுமானால், ஒவ்வொருவரும் எத்தனை முறை பந்தைப் பெற முடியும் என்றும் கண்டுபிடி.

விடை : (i) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) ஒவ்வொரு பையனும் $\frac{1}{3}$ தடவைகளும், ஒவ்வொரு பெண்ணும் $\frac{1}{6}$ தடவைகளும் பந்தைப் பெறுவர்.

15. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலைதிரிபு வரைபடங்கள் ஒவ்வொன்றினாலும் குறிப்பிடப்படும் மார்கோவ் சங்கிலியின் நிலைதிரிபு அணியைக் காண்க



படம் 23.

விடை : (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (iii) $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. ஸ்டொக்காஸ்டிக் வழிமுறைகள்

அல்லது

செயற் பாங்குகள்

(STOCHASTIC PROCESS)

10·1 வரையறை

ஏதேனும் ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் மூலகத்தை தன்னகத்தே கொண்டுள்ள வழிமுறையை ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் வழிமுறை என்று கூறுகிறோம். பொதுவாக, t எனும் நேரத்தைக் குறிக்கக் கூடிய உண்மையான துணை அலகினைப்போன்ற எண்ணைச் சார்ந்துள்ள இயைபிலா மாறிகளின் தொகுதியை ஸ்டொக்காஸ்டிக் செயற் பாங்கு அல்லது வழிமுறை என்று கூறுவதுண்டு.

எடுத்துக்காட்டாக,

(அ) தொலைபேசித் தொடர்பகத்தில், ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் வந்து சேரக்கூடிய அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை,

(ஆ) குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில், திரை அரங்கில் படம் பார்ப்பதற்காக Q-வரிசையில் வந்து சேரக் கூடியவர்களின் எண்ணிக்கை,

(இ) குறிப்பிட்ட நேரத்திற்குள் ஏற்படும் தாவர உயிர் அணுக்களின் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை, முதலானவை இத்தகைய வழிமுறையைச் சேர்ந்தனவாகும்.

இதற்கு முன் பார்த்த இயைபிலா நடைகளும், மார்கோவ் சங்கிலிகளும்கூட ஸ்டொக்காஸ்டிக் வழிமுறைகளாகும். ஆனால், அவற்றுள் ஏற்படும் மாற்றங்கள் $t = 1, 2, 3, \ldots$ என்ற குறிப்பிட்ட

முழு எண் மதிப்புகளுக்கு ஒப்ப அமைவனவாகும் என்று கண்டோம் இங்கு எந்நேரத்திலும் நிகழக்கூடிய (அதாவது t-ன் விகிதமுறு மதிப்புகள் அனைத்திற்கும் ஏற்ப அமையும்) மாற்றங்களை உடைய வழிமுறைகளைப் பற்றி படிப்போம்.

குறிப்பாக, ஒரு தொலைபேசித் தொடர்பகத்தில் வந்து சேரும் அழைப்புகளைப்பற்றி, முதலில் கவனிப்போம்.

இங்கு t எனும் ஒவ்வொரு நொடியும் ஒரு முயற்சிக்கு ஒப்பாக அமைவதாகக் கொள்வோம். ஒரு பரிசோதனையின்போது t என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் வரையில் வந்து சேரும் அழைப்புகளின் எண்ணிக்கையை $X(t)$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். மேலும் முதல் அழைப்பு t_1 என்ற நேரத்திலும், இரண்டாவது அழைப்பு t_2 என்ற நேரத்திலும். மூன்றாவது அழைப்பு t_3 என்ற நேரத்திலும், இதேபோன்று இன்ன பிற அழைப்புகளும் வந்து சேருவதாகக் கொண்டால், $X(t)$ எனும் சார்பின் மதிப்பு பின்வருமாறு:

$0 < t < t_1$ எனும்போது, $X(t) = 0$

$t_1 < t < t_2$ எனும்போது, $X(t) = 1$

$t_2 < t < t_3$ எனும்போது, $X(t) = 2$

இதேபோன்று $X(t)$-ன் இன்ன பிற மதிப்புகளையும் பெறக் கூடும். அதாவது; இங்கு $X(t)$ எனும் சார்பு, தொலைபேசித் தொடர்பகத்தில் வரக்கூடிய அழைப்புகளின் முன்னேற்றத்தைக் குறிக்கும் என அறிகிறோம். இத்தகைய பரிசோதனையைக் குறிப்பிட $X(t)$ என்ற சார்புகளைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட கூறுவெளியைப் பயன்படுத்துவதுண்டு.

அடுத்து, ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் ஒரு நிமிடத்திற்குள் ஆறு அழைப்புகள் வந்தன எனும் கூட்டு நிகழ்ச்சியை எவ்வாறு குறிப்பிடுதல் என்று பார்ப்போம்.

குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் அமையும் t எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு ஒப்ப,

$X(t+1) - X(t) \geq 6$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு கிடைக்கப்பெறும் $X(t)$-ன் அனைத்து மதிப்புகளின் தொகுதிதான் அக்கூட்டு நிகழ்ச்சியைக் குறிப்பதாகும். இத்தகைய கூட்டு நிகழ்ச்சிகளை சிக்கலான கூறுவெளிகளின் மூலம்தான் குறிப்பிட

முடியும். ஆனால் இங்கு சாதாரண கூறுவெளிகளால் குறிப்பிடத் தக்க ஒரு சில ஸ்டொக்காஸ்டிக் வழிமுறைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

10 2 பாய்சான் செயற்பாங்கு (The Poisson Process).

தனித்தனி மாறிகளின் பரவல்களைப்பற்றி படிக்குங்கால், ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை மதிப்பாக பாய்சான் பரவலைப் பெற முடியும் என்று கண்டோம். ஆனால் இங்கு ஒரு புதிய முறையைப் பின்பற்றுவதன் மூலம் பாய்சான் பரவலை எவ்வாறு பெறலாம் எனக் காண்போம்.

தொலைபேசித் தொடர்பகத்தில் அழைப்புகள் வந்து சேருதல், அணுக்கூறுகளைப் பிரித்தெடுத்தல் போன்ற இயைபிலா நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக்கொள்வோமானால், இவை ஒவ்வொன்றிலும் கணப்பொழுதில் மாற்றங்கள் ஏற்படக்கூடும். இவ்வாறு, ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின்போதும் ஏற்படும் மாற்றங்கள் ஒரே வகையானவை எனக் கருதுவோம். ஒவ்வொரு மாற்றத்தையும் கால (நேர) அச்சின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியினால் குறிப்பிடுவோம். அதாவது ஒரு நேர்கோட்டின்மீது அமையும் புள்ளிகளின் இயைபிலா பரவல்கள் சிலவற்றைப் பற்றி இங்கு அறியவிருக்கிறோம்.

இயற்பியலைச் சார்ந்த வழிமுறைகளின் முக்கிய பண்புகளாகப் பின்வரும் இரண்டு பண்புகளைக் கூறலாம்.

(i) நேரத்தைப் பொறுத்தவரையில் அவை ஒரே வகையானவையாக இருக்கும்.

(ii) பின்னர் ஏற்படும் மாற்றங்கள், முன்னால் நிகழ்ந்த மாற்றங்களை சார்ந்திருக்கமாட்டா.

இவ்விரு பண்புகளைக் கொண்டு, இத்தகைய வழிமுறைகளுக்குக் காரணமான விசைகள் எந்த விதத்திலும், எப்பொழுதும் மாறுதிருக்கும் என்று அறியலாம். ஆகையால் t நீளமுடைய ஒவ்வொரு கால இடைவெளியிலும் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு மாருதிருக்கும் என்று விளங்கும்.

t நீளமுடைய ஒரு கால் இடைவெளியில் சரியாக n மாற்றங்கள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை $P_n(t)$ என்க. பின் இந்த இடைவெளியில் மாற்றமில்லாதிருத்தலை $P_0(t)$ என்ற நிகழ்தகவும். ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாற்றங்கள் இருத்தலை

$[1 - P_0(t)]$ என்ற நிகழ்தகவும் குறிப்பனவாகும். மேலும் t பூஜ்யத்தை அணுகும்போது,

$\left[\frac{1 - P_0(t)}{t}\right]$-ன் எல்லை மதிப்பை λ எனும் மிகை மாறிலியினால் குறிப்பிடுவோம் பின் h நீளமுடைய மிகச் சிறிய இடைவெளியில் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாற்றங்கள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பு,

$1 - P_0(h) = \lambda h + O(h)$ என்றாகும் இங்கு $O(h)$ என்பது h-ஐ விட சிறிய பரிமாண வரிசையுடையதாகும். அதாவது h பூஜ்யத்தை அணுகும்போது $O(h)$-ம் பூஜ்யத்தை அணுகும் என்று பொருளாகும்.

10.2-1 பாய்சான் செயற் பாங்கிற்கான அடிக்கோள்கள் (O, t) எனும் கால இடைவெளியில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை எதுவாயினும்,

(i) $(t, t + h)$ என்ற சிறிய இடைவெளியில் ஒரு மாற்றம் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு, $\lambda h + O(h)$ என்றிருக்கும்.

(ii) இதே இடைவெளியில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாற்றங்கள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு, $O(h)$ என்றிருக்கும்.

இங்கு $(O, t), (t, t + h)$ என்ற இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள இடைவெளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். n-ன் மதிப்பு ஒன்றுக்குச் சமமாகவோ அல்லது ஒன்றைவிட அதிகமாகவோ இருக்கும் போது, $(O, t + h)$ எனும் இடைவெளியில் ஏற்படும் n மாற்றங்கள், பின்வரும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுடைய மூன்று வழிகளில் ஏதேனும் ஒரு வழியில் நிகழக்கூடும்.

(i) (O, t) எனும் இடைவெளியில் n மாற்றங்களும், $(t, t + h)$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு மாற்றங்கூட இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

(ii) (O, t)-ல் $(n - 1)$ மாற்றங்களும், $(t, t + h)$-ல் ஒரு மாற்றமும் ஏற்படலாம்.

(iii) $x \geq 2$ என்றால், இடைவெளி (O, t)-ல் $(n - x$ மாற்றங்களும், இடைவெளி $(t, t + h)$-ல் x மாற்றங்களும் ஏற்படலாம்.

மேலும், முதல் நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P_n(t)[1 - \lambda h - O(h)]$$

இரண்டாவது நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P_{n-1}(t)\ [\lambda(h) + O(h)]$$

மூன்றுவது நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$= O(h)$ என்று அறியலாம்.

எனவே $(0, t + h)$ என்ற இடைவெளியில் n மாற்றங்கள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P_n(t+h) = P_n(t)[1 - \lambda h - 0(h)] + P_{n-1}(t)[\lambda h + 0(h)] + 0(h)$$

$$= P_n(t)(1 - \lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h + 0(h)$$

i.e., $$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda \cdot P_n(t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t) + \frac{0(h)}{h} \quad \ldots\ldots (1)$$

h பூஜ்யத்தை அணுகும்போது, $\left[\frac{0(h)}{h}\right]$-ம் பூஜ்யத்தை அணுகுமாதலால், இடதுபுறக் கோவையின் எல்லை மதிப்பு உளதாயிருக்கும் என்று அறிகிறோம்.

ஆகையால், $$\lim_{h \to 0}\left[\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h}\right] = -\lambda \cdot P_n(t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t)$$ என்றாகும்,

i.e., $$P'_n(t) = -\lambda \cdot P_n(t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t),\ n \geq 1 \quad \ldots\ldots (2)$$

மேலும் $n=0$ எனில், இரண்டாவது, மூன்றுவது வழிகள் பொருத்த மற்றவையாகிவிடும். அதாவது நிகழ்ச்சி முதல் வழியில்தான் நடைபெறும்.

எனவே, $P_0(t + h) = P_0(t)(1 - h\lambda) + o(h)$ என்று கிடைக்கும்.

$$i.e., \quad \frac{P_o(t+h) - P_o(t)}{h} = -\lambda P_o(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$\therefore \quad Lt \left[\frac{P_o(t+h) - P_o(t)}{h} \right] = -\lambda \cdot P_o(t)$$

$$i.e., \quad P'_o(t) = -\lambda \cdot P_o(t) \qquad \ldots\ldots (3)$$

சமன்பாடு (3)—லிருந்து,

$$\int \frac{P'_o(t)}{P_o(t)} dt = -\lambda t + c, \quad c \text{ என்பது ஒரு மாறிலி}$$

$$i.e., \quad \log P_o(t) = -\lambda t + c$$

ஆனால் $P_o(o) = 1$ என்று தெரியும்; ஆகையால் $c = o$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad \log P_o(t) = -\lambda t$$

$$i.e., \quad P_o(t) = e^{-\lambda t}$$

இதேபோன்று சமன்பாடு (2) -லிருந்து, $n = 1$ எனும்போது,

$$P'_1(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_o(t)$$

$$= -\lambda P_1(t) + \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

$$i.e., \quad P'_1(t) + \lambda P_1(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

இது ஒரு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு இதன் தீர்வு காண்போமானால், $P_1(t) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t}$ என்று கிடைக்கப்பெறும்.

இவ்வாறு அடுத்தடுத்து கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண்போமானால், பின்வரும் தொடர்பு கிடைக்கும்.

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{\angle n} \cdot e^{-\lambda t}$$

இந்நிகழ்தகவு பாய்சான் பரவலைக் குறிக்கும் என்று தெரியும். இவ்வாறு பாய்சான் பரவலுக்குரிய நிகழ்தகவை, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாக பெற முடியும் என்று அறிகிறோம்.

1·0-3 தூய பிறப்பு செயற்பாங்கு (Pure Birth Process)

பாய்சான் செயற்பாங்கினை விளங்கும்போது, $(t, t+h)$ எனும் மிகச்சிறிய கால இடைவெளியில் ஏற்படக்கூடிய ஒரு மாற்றத்திற்கான நிகழ்தகவு, (o, t) என்ற இடைவெளியில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைச் சார்ந்திருக்காது எனக் கருதினோம். ஆனால் இந்த ஊகத்தைக் கொள்ளாமலேயே, பொதுமைப் படுத்தி, வழி முறைக்கான விளக்கம் தரமுடியும் என்பதை இங்கு காணலாம்.

(o, t) என்ற இடைவெளியில் n மாற்றங்கள் ஏற்படும்போது, $(t, t+h)$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு புதிய மாற்றம் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை $[\lambda_n \cdot h + o(h)]$ எனக் கொள்வோம். அதாவது' λ என்ற ஒரே ஒரு மாறிலிக்குப்பதிலாக $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ என்ற மாறிலிகளின் தொடர் முறையை எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம். மேலும், (o, t) என்ற இடைவெளியில் n மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றன என்று கூறுவதற்குப் பதிலாக, கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி E_n என்ற நிலையில் இருப்பதாகக் கூறுவோம். ஆகையால், $(t, t+h)$ என்ற சிறிய இடைவெளியில் ஒரு புதிய மாற்றம் ஏற்படும் எனக் கூறுதல், அத்தொகுதி E_n என்ற நிலையிலிருந்து E_{n+1} என்ற நிலைக்கு நிலை மாற்றம் அடைகிறது என்று பொருள்படும். ஒரு தூய பிறப்பு வழி முறையில் E_n எனும் நிலையிலிருந்து E_{n+1} என்ற நிலைக்குத் தான் மாற்றம் ஏற்படமுடியும். இத்தகைய வழி முறையைப் பின் வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

அடிக்கோள்கள் : (i) t என்ற நேரத்தில் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி E_n, $(n=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ என்ற நிலையில் இருக்குமானால் $(t, t+h)$ எனும் கண நேரத்தில் அத்தொகுதி E_{n+1} என்ற நிலையை அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $[\lambda_n \cdot h + o(h)]$ என்றிருக்கும்.

(ii) அத்தொகுதி, $(t, t+h)$ என்ற நேரத்தில், வேறு ஏதேனும் நிலையை அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $o(h)$ என்றிருக்கும்.

இந்த ஊகத்தின் முக்கிய கருத்து, எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையிலும் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி இருக்கக்கூடிய கால இடைவெளியைப் பொறுத்து நிலை மாற்றங்கள் திடீரென ஏற்படாது என்பதாம்.

t எனும் நேரத்தில் தொகுதி E_n என்ற நிலையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை $P_n(t)$ என்க. பின் $P_n(t)$ என்ற சார்புகள் கீழே கிடைக்கப்பெறும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குட்பட்டிருக்கும். இப்பொழுது,

$$P_n(i+h) = P_n(t)(1 - \lambda_n \cdot h) + P_{n-1}(t) \cdot \lambda_{n-1} h + o(h)$$

$$\therefore \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = - \lambda_n \cdot P_n(t) + \lambda_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

எனவே, h பூஜ்யத்தை அணுகும்போது, வலது பக்கம் ஒரு முடிவுடைய எண்ணாக அமையுமாதலால், எல்லை மதிப்பு காண,

$P'_n(t) = - \lambda_n \cdot P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t)$; $(n \geq 1)$ என்று பெற முடியும்.

இதேபோன்று, $P'_0(t) = - \lambda_0 P_0(t)$ என்றும் பெறலாம்.

இவைதான் நமக்குத் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும். இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து $P_0(t)$-ன் மதிப்பை முதலில் கணக்கிடல் வேண்டும். அதன்பின் $P_1(t)$, $P_2(t) \ldots\ldots\ldots P_n(t)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பெறமுடியும்.

இங்கு (o, t) என்ற கால இடைவெளியில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் நிலை குறிக்குமானால், பின் ஆரம்ப நிலை E_0 என்றாகும். ஆகையால் $P_0(o) = 1$ என்றிருக்கும். இதிலிருந்து,

$P_0(t) = e^{-\lambda_n \cdot t}$ என்று பெறுகிறோம்.

ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி E_0 என்ற நிலையிலிருந்து தான் புறப்பட வேண்டுமென்பது அவசியமில்லை. குறிப்பாக தொகுதியின் ஆரம்ப நிலையை E_i எனக் கொள்வோமானால், பின்

$P_i(o) = 1$ என்று கிடைக்கப்பெறும்.

மேலும், $n \neq i$ எனும்போது, $P_n(o) = o$ என்றும் பெறலாம். ஆரம்ப நிலைக்கான இந்த நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், n-ன் மிகை முழு மதிப்புகளுக்கொப்ப, $P_n(t)$ என்ற நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகளைத் திட்டவட்டமாகக் கணக்கிட முடியும்.

குறிப்பாக, $P_o(t) = P_1(t) = P_2(t) = \ldots\ldots = P_{i-1}(t) = 0$ என்று அறியலாம்.

இதுகாறும் பார்த்த வழி முறைகளை ஒரு சில எடுத்துக்காட்டு களின் மூலம் விளக்குவோம்.

10.3-1 கதிரியக்க பொருள் நிலைமாற்றம்(Radio-active Transmutation) அணுக்கூறுகளை அல்லது r-கதிர்களை வெளிப்படுத்துவதன் மூலம் உரேனியம் போன்ற கதிரியக்க அணு; வேறு வகையான ஒரு அணுவாக மாறக்கூடும் என்று கண்டுள்ளனர். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெறும் ஒவ்வொரு வகை அணுவும், ஒரு குறிப்பிட்ட தொகுதியின் இயலத்தக்க நிலையை குறிக்கும் என்று கொள்ளலாம். இவ்வழி முறை தொடர்ச்சியாக நடைபெறுமானால், அடுத்தடுத்து நிலைமாற்றங்கள் வரிசையாக ஏற்படும் என்று அறியக்கூடும். இந் நிலைமாற்றங்களை,

$E_o \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \ldots\ldots\ldots E_n$ என்ற குறியீட்டினால் குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

மேலும் ஒத்துக்கொள்ளப்பட்ட இயற்பியல் கொள்கைகளின் படி குறிப்பிட்ட அணு E_n என்ற நிலையில் இருக்கும் வரை, E_n-லிருந்து E_{n+1}-க்கு நிலை மாற்றம் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு மாறாமலிருக்கும். இத்தகைய நிலை மாற்றங்களைக் குறிக்கும் வழி முறையினை, மேலே கண்டறிந்த வகைக்கெழு சமன்பாடுகளால் அறிய முடியும். அணுவின் இறுதி நிலையை E_m குறிக்குமானால், E_m என்ற நிலைக்குப்பின் எவ்வித நிலை மாற்றமும் இருக்க முடியாது. ஆகையால், $\lambda_m = 0$ என்றாகும். எனவே இத்தொகுதி $n = m$ எனும்போது முடிவுறும். $n > m$ என்றால், $P_n(t)$-ன் மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யமாகும்.

10.3-2 யூல் வழிமுறை (Yule Process): ஒரு இனத் தொகுதியில் உள்ள உயிர்கள் ஒவ்வொன்றும் புதிய உயிர்களை உற்பத்தி செய்து கொள்வதன் மூலம் தன் இனம் அழிந்துவிடாமல் இருப்பதாகக் கொள்வோம். மேலும் h அளவுள்ள எந்த ஒரு குறுகிய கால இடைவெளிக்குள்ளும், ஒவ்வொரு உயிரும் ஒருபுதிய

உயிரை உற்பத்தி செய்வதற்கான நிகழ்தகவு, $[\lambda h + 0(h)]$ என்று கருதுவோம். இங்கு λ என்ற மாறிலி உற்பத்திப் பெருக்க வீதத்தைத் தீர்மானிக்கும். இவ்வுயிர்களுக்கிடையே எதிரெதிர் செயல் விளைவு இல்லையென்றும், t என்ற நேரத்தில் கொடுக்கப் பட்ட இனத்தொகுதியின் அளவு n என்றும் கொடுக்கப்பட்டால்; $(t, t+h)$ எனும் மிகக்குறுகிய கால இடைவெளியில் உயிர் பெருக்கம் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $[n\lambda h + 0(h)]$ என்றிருக்கும். எனவே, இத்தொகுதியில் சரியாக n உயிர்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P_n(t)$-ன் மதிப்பை,

$P'_n(t) = -n\lambda \; P_n(t) + (n-1)\lambda \; P_{n-1}(t); \; n \geq 1$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் மூலம் பெறக்கூடும். ... ... (1)

மேலும் $t = 0$ என்ற நேரத்தில் தொகுதியின் அளவு K எனில், பின், $P_k(0) = 1$; $n \neq K$ எனும்போது $P_n(0) = 0$ என்பன ஆரம்ப நிலைக்கான நிபந்தனைகளாகும்.

இவற்றைப் பயன்படுத்தி, $n \geq R$ எனும்போது பின்வரும் தீர்வுகள் கிடைக்கப்பெறும்.

$$P_n(t) = {}^{n-1}c_{n-K} \cdot e^{-K\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-K} \quad \ldots\ldots(2)$$

(இங்கு $n < K$ எனும்போது, $P_n(t) = 0$ என்று தெரியும்).

இப்பரவல் குறை ஈருறுப்புப் பரவலின் ஒரு சிறப்பு வகையாகும். இத்தகைய பரவல்களையுடைய i தனித்தனி இயையிலா மாறிகளின் கூட்டுத்தொகை, t என்ற நேரத்தில், இனத் தொகுதியின் அளவைக் குறிக்கும். இந்த i மாறிகளும் கொடுக்கப் பட்ட இனத்தொகுதியின் i மூல உயிர்களின் சந்ததியினைக் குறிப்பனவாகும்.

சமன்பாடு (2)-ன் மூலம் குறிப்பிடப்படும் நிகழ்தகவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $K e^{\lambda t}$ என்றும், மாறுபாடு, $K \cdot e^{\lambda t}(e^{t\lambda} - 1)$ என்றும் நிறுவமுடியும்.

உயிரினங்களின் படிமுறை வளர்ச்சியின் கணக்கியல் கொள்கையைப் பற்றி அறிவதற்காக, இவ்வழி முறை யூல் என்பவரால் முதன்முதலாகப் பின்பற்றப்பட்டது. இங்கு ஒவ்வொரு உயிரும் ஒரு புதிய உயிரை உற்பத்தி செய்வதற்கான

நிகழ்தகவு மாருமலிருக்கும் என்று கொள்வதன்மூலம் உயிர்களின் அளவுகளில் இருக்கக்கூடிய வேறுபாடு நீக்கற்பாலது என்று அறியலாம். மேலும் ஏதேனும் ஒரு உயிர் இறக்கக்கூடும் என்பதையும் இங்கு நீக்கியுள்ளோம் என்பதும் குறிப்பிடப்பட வேண்டும் இவ்வாறு, மேலே கண்டுபிடிக்கப்பட்ட வாய்பாடு தோராய மதிப்பீட்டைத்தான் கொடுக்கும் என்று தெரிகிறது.

எனவே, தம்மிடையே எதிரெதிர்ச் செயல் விளைவு இல்லாத ஆனல் தம்மைப்போன்ற சந்ததியினை உருவாக்கவல்ல உயிர்களின் இனத்தொகுதிக்கு வகையீட்டுக்கெழு சமன்பாடு (1)-ஐப் பயன்படுத்துவதன்மூலம் தேவையான வழிமுறையை பெறக்கூடும் என அறிகிறோம்.

துணை நூல்களின் பட்டியல்

1. *Harald Cramer* : The Elements of Probability Theory and some of its applications — John Wiley and Sons.
2. *Harald Cramer* : Mathematical Methods of Statistics — Princeton University Press.
3. *Emanuel Parzen* Modern Probability Theory and its applications. — John Wiley and Sons.
4. *Kapur and Saxena* : Methematical Statistics — S. Chand and Co., Delhi.
5. *Mahadev Dutta and Staya Pada Pal* : Introduction to the Mathematical Theory of Probability and Statistics. — The World Press Private Limited.
6. *Dr. Sankara narayanan* : Methematical Statistics — National Publishing Co., Madras.
7. *Saxena* : Probability and its Applications. — S. Chand and Co., Delhi.
8. *Weatherburn* : A First Course in Mathematical Statistics. — Cambridge University Press.
9. *William Feller* : An Introduction to Probability Theory and its Applications—Vol. I - John Wiley and Sons.

அட்டவணைகள்
(TABLES)

TABLE I
LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											Mean Differences								
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

	.0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											Mean Differences								
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9235	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

TABLE II
ANTI-LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											Mean Differences								
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ANTI-LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

TABLE III

Ordinates of the Normal Curve

The origin of x is at the mean. The table gives the value of $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, which is σ times the ordinate of the normal curve $y=\phi(y)$.

$\frac{x}{\sigma}$	0.00	0.01	0,02	0.03	0.04	0,05	9,06	0.07	0.08	0.09
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.2925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3868	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3762	.3739	.3725	3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3589	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3457	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2939	.2966	2943	.2925
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	2780	.2756	.2732	.2709	.2684
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2992	.2468	.244[illegible]
1.0	.2420	2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.1207	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.5748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0395	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0330	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0161	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.1027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.3018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.5009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001

TABLE IV

Area under the Normal Curve

The area is measured from the mean $x=0$, to any ordinate, $z=x$. The results are given for values of x/σ at intervals of 0·01.

$\frac{x}{\sigma}$	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09
0·0	·0000	·0040	·0080	·0120	·0159	·0199	·0239	·0279	·0319	·0359
0·1	·0398	·0438	·0478	·0517	0557	·0596	·0636	·0675	·0714	·0753
0·2	·0793	·0832	·0871	0910	·0948	·0987	·1026	·1064	·1103	·1141
0·3	·1179	·1217	·1255	·1293	1331	·1368	·1406	·1443	·1480	·1517
0·4	·1554	·1591	·1628	·1664	·1700	·1736	·1772	·1808	·1844	·1879
0·5	·1915	·1950	·1925	·2019	·2054	·2088	·2123	·2157	·2190	·2224
0·6	·2257	·2291	·2324	·2357	·2389	·2422	·2454	·2486	·2518	·2549
0·7	·2580	·2611	·2642	·2673	·2704	·2734	·2764	·2794	·2823	·2852
0·8	·2881	·2910	·2939	·2967	·2995	·3023	·3051	·3078	·3106	·3133
0·9	·3159	·3186	3212	3238	·3264	·3289	3315	·3340	·3365	·3389
1·0	·3413	·3438	·3461	·3485	·3508	·3531	·3554	·3577	·3599	·3621
1·1	·3643	·3665	·3686	·3708	·3729	·3749	·3770	.3790	·3810	·3830
1·2	·3849	·3869	3888	·3907	·3925	·3944	3962	·3980	·3997	·4015
1·3	·4032	·4049	·4066	·4082	4099.	4115	·4131	·4147	·4162	·4177
1·4	·4192	·4207	4222	·4236	·4251	·4265	·4279	·4292	·4306	·4319
1·5	·4332	·4345	·4357	·4370	·4382	·4394	·4406	·4418	·4430	·4441
1·6	·4452	·4463	4474	·4485	·4495	·4595	·4515	·4525	·4535	·4545
1·7	·4554	·4564	·4573	4582	·4591	·4599	·4608	·4616	·4625	·4633
1·8	·4641	4649	·4656	·4664	·4971	·4678	·4686	·4693	·4699	·4706
1·9	·4713	4719	·4726	·4732	·4738	·4744	·4750	·4756	·4762	·4767
2·0	·4772	·4778	·4783	·4788	·4793	·4798	·4803	·4808	·4812	·4817
2·1	·4821	·4826	·4830	·4834	4838	·4842	·4846	·4850	·4854	·4857
2·2	·4861	·4865	·4868	·4871	·4875	·4878	·4881	·4884	·4887	·4890
2·3	·4893	·4896	·4898	·4901	·4904	·4906	·4909	·4911	·4913	·4916
2·4	·4918	·4920	4922	·4925	·4927	·4929	·4931	·4932	·4934	·4936
2·5	·4938	·4940	·4940	·4943	·4945	·4946	·4948	·4949	·4951	·4952
2.6	·4953	·4955	·4956	·4957	·4959	·4960	·4961	·4962	·4963	·4964
2.7	·4965	·4966	·4967	·4968	·4969	·4970	·4971	·4972	·4973	·4974
2.8	·4974	·4975	·4976	·4977	·4977	·4978	·4979	·4980	·4980	·4981
2·9	·4981	·4982	·4983	·4983	·4984	·4984	·4985	·4985	·4986	·4986
3·0	·49865	·4987	·4987	·4988	·4988	·4988	·4989	·4989	·4990	·4990
3·1	·49903	·4991	·4991	·4991	·4992	·4992	·4992	·4992	·4993	·4993

TABLE V

Values of mod. t with a probability P of being exceeded in random sampling.

ν=number of degrees of freedom

P / ν	0·50	0·10	0·05	0·02	0·01
1	1·000	6·34	12·71	31·82	63·66
2	0·816	2·92	4·30	6·96	9·92
3	0·765	2·35	3·18	4·54	5·84
4	0·741	2·13	2·78	3·75	4·60
5	0·727	2·02	2·57	3·36	4·03
6	0·718	1·94	2·45	3·14	3·71
7	0·711	1·90	2·36	3·00	3·50
8	0·706	1·86	2·31	2·90	3·36
9	0·703	1·83	2·26	2·82	3·25
10	0·700	1·81	2·23	2·76	3·17
11	0·697	1·80	2·20	2·72	3·11
12	0·695	1·78	2·18	2·68	3·06
13	0·694	1·77	2·16	2·65	3·01
14	0·692	1·76	2·14	2·62	2·98
15	0·691	1·75	2·13	2·60	2·95
16	0·690	1·75	2·12	2·58	2·92
17	0·689	1·74	2·11	2·57	2·90
18	0·688	1·73	2·10	2·55	2·88
19	0·688	1·73	2·09	2·54	2·86
20	0·687	1·72	2·09	2·53	2·84
21	0·686	1·72	2·08	2·52	2·83
22	0·688	1·72	2·07	2·51	2·82
23	0·685	1·71	2·07	2·50	2·81
24	0·685	1·71	2·06	2·49	2·80
25	0·684	1·71	2·06	2·48	2·79
26	0·684	1·71	2·06	2·48	2·78
27	0·684	1·70	2·05	2·47	2·77
28	0·683	1·70	2·05	2·47	2·76
29	0·683	1·70	2·04	2·46	2·76
30	0·683	1·70	2·04	2·46	2·75
35	0·682	1·69	2·03	2·44	2·72
40	0·681	1·68	2·02	2·42	2·71
45	0·680	1·68	2·02	2·41	2·69
50	0·679	1·68	2·01	2·40	2·68
60	0·678	1·67	2·00	2·39	2·66
∞	0·674	1·64	1·96	2·33	2·58

TABLE VI 5 and 1% 'points' of F

ν_1 is the number of degrees of freedom for the greater estimate of variance, and ν_2 for the smaller.

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
2	18·51 98·49	19·00 99·00	19·16 99·17	19·25 99 25	19·30 99·30	19·33 99·33	19·37 99·36	19·41 99·42	19·45 99·46	19·50 99·50
3	10·13 34·12	9·55 30·82	9·28 29·46	9·12 28·71	9·01 28·25	8·84 27·91	8·84 27·39	8 74 27·05	8·64 26·60	8·53 26·12
4	7·71 21·20	6·94 18·00	6·59 16·69	6·39 15·98	6·26 15·52	6·16 15·21	6·04 14·80	5·91 14·37	5·78 18·93	5·63 13·46
5	6·61 16·26	5·79 13·27	5·41 12·06	5·19 11·29	5·05 10·97	4·95 10·67	4·82 10·27	4·68 9·89	4 53 9·47	4·36 9·02
6	5·99 13·74	5·14 10·92	4·76 9·78	4·53 9·15	4·39 8·75	4·28 8·47	4·28 3·10	4 00 7·72	3·84 7·31	3·67 6·88
7	5 59 12·25	4·74 9·55	4·35 8·45	4·12 7 85	3·97 7·46	3·87 7·19	3·73 6·84	3·57 6·47	3·41 6·07	3·23 5·65
8	5·32 11·26	4·46 8·65	4·07 7·59	3·84 7·01	3·69 6·63	3.58 6·37	3·44 6·03	3·28 5 67	3·12 5·28	2·93 4·86
9	5·12 10·56	4·26 8·02	3·8[illegible] 6·99	3·63 6·42	3·48 6·06	3·37 5·80	3·23 5·47	3·07 5·11	2·90 4·73	2·71 4·31
10	4·96 10·0	4·10 7·56	3·71 6·55	3·48 5·99	3·33 5·64	3·22 5·39	3·07 5·06	2·91 4·71	2·74 4 33	2·54 3·91
12	4·75 9·33	3·88 6·93	3·49 5·95	4·26 5·41	3·11 5·06	3·00 4·82	2·85 4·50	2 69 4·16	1·50 3·78	2·30 3·36
14	4·60 8·86	3·74 6·51	3·34 5·56	3·11 5 03	2·96 4·69	2·85 4·46	2·70 4.14	2·53 3·80	2·35 3·43	2,13 3.00
16	4·49 8·53	3·63 6·23	3·24 5·29	3·01 4·77	2·85 4·44	2·74 4·20	2·59 3·89	2·42 3·55	2·24 2·18	2·01 2·75
18	4·41 8·28	3·55 6·01	3·16 5 09	2 93 4·58	2·77 4·25	2·66 4·01	2·51 3·71	2·34 3·37	2·15 3.01	1·92 2·57
20	4·35 8·10	3·49 5·85	3 10 4·94	2·87 4·43	2·71 4·10	2·60 3·87	2·45 3·56	2·28 3·23	2.08 2·86	1·84 2·42
25	4·24 7·77	3 38 5·57	2·90 4·68	4·76 4·18	2·60 3·86	2·49 3·63	2·34 3·32	2·16 2·99	1·96 2·62	1·71 2·17
30	4·17 7·56	3·32 5·39	2·92 4·51	2·69 4·02	2·53 3·70	2·42 3·47	2.27 3·17	2·09 2·84	1·89 2·47	1·62 2·01
40	4·08 7·31	3·23 5·18	2·84 4·31	2·61 3·83	2·45 3·51	2·34 3·29	2 18 2·99	2·00 2·66	1·79 2·29	1·51 1·81
60	4·00 7·08	3·15 4·98	2·76 4·13	2·52 3·65	2·37 3·34	2·25 3·12	2·10 2·82	1·92 2·50	1·70 2·12	1·39 1·60
80	2·96 6·96	3·11 4·88	2·72 4·04	2·49 3·56	2·33 3·25	2·21 3·04	2·06 2·74	1·88 2·41	1·65 2·03	1.32 1·49

TABLE VII

Values of χ^2 with probability P of being exceeded in random sampling.

ν=number of degrees of freedom

P / ν	0·99	0·95	0·50	0·30	0·20	0·10	0·05	0·01
1	0·0002	0·004	0·46	1·07	1·64	2·71	3·84	6·64
2	0·020	0·103	1·39	2·41	3·22	4·00	5·99	9·21
3	0·115	0·35	2·37	3·66	4·64	6·25	7·32	11·34
4	0·30	0·71	3·36	4·88	5·9	7·78	9·49	13·28
5	0·55	1·14	4·35	6·06	7·29	9·24	11·07	15·09
6	0·86	1·64	5·35	7·23	8·56	10·64	12·59	16·81
7	1·24	2·17	6·35	8·38	9·80	12·02	14·07	18·48
8	1·65	2·73	7·34	9·52	11·03	13·36	15·51	20·09
9	2·09	3·32	8·34	10·66	12·24	14·68	16·92	21·67
10	2·56	3·94	9·34	11·78	13·44	15·99	18·31	23·21
11	3·05	4·58	10·34	12·90	14·63	17·28	19·68	24·72
12	3·57	5·23	11·34	14·01	15·81	18·55	21·03	26·22
13	4·11	5·89	12·34	15·12	16·98	19·81	22·36	27·69
14	4·66	6·57	13·34	16·22	18·15	21·06	23·68	29·14
15	5·23	7·26	14·34	17·32	19·31	22·31	25·00	30·58
16	5·81	7·96	15·34	18·42	20·46	23·54	26·30	32·00
17	6·41	8·66	16· 4	19·51	21·62	24·77	27·59	33·41
18	7·02	9·39	17·34	20·60	22·76	25·99	28·87	34·80
19	7·63	10·12	18·34	21·69	23·90	27·20	30·14	36·19
20	8·26	10·85	19·34	22·78	25·04	28·41	31·41	37·57
21	8·90	11·59	20·34	23·86	26·17	29·62	32·67	38·93
22	9·54	12·34	21·34	24·94	27·30	30·81	33·92	40·29
23	10·20	13·09	22·34	26·02	28·43	32·01	35·17	41·64
24	10·86	13·85	23·34	2 ·10	29·55	33·20	36·42	42·98
25	11·52	14·61	24·34	28·16	30·68	34·38	37·65	44·31
26	12·20	15·38	25·34	29·25	31·80	35·56	38·88	45·64
27	12·88	16·15	26·34	30·32	32·91	36·74	40·11	45·96
28	13·56	16·93	27·34	31·39	34·03	37·92	41·34	45·28
29	14·26	17·71	28·34	32·46	35·14	39·09	52·56	49·59
30	18·95	18·49	. 9·34	33·53	36·25	40·26	43·77	50·89

கலைச் சொற்கள்

A

Abscissa	—	கிடைத்தூரம், X-ஆயக்கூறு
Absolute value	—	எண்ணளவு, எண்மதிப்பு
Abstract	—	கருத்தியலான, புலனாகாத
Accuracy	—	திருத்தம்
Actual	—	உண்மையான
Addition	—	கூட்டல், சேர்த்தல்
,, Law	—	கூட்டல் விதி
Aggregate	—	மொத்தம்
Allocation	—	பங்கீடு
Analysis	—	பகுப்பாய்வு
,, of variance	—	மாறுபாட்டின் பகுப்பாய்வு, பரவற்படி ஆய்வு.
Analytic method	—	பகுப்பாய்வு முறை
Apparent	—	வெளிப்படையான.
Approximate	—	தோராயமான
Arithmatic Mean	—	கூட்டுச்சராசரி
Array	—	வரிசை
Association	—	உறவு, தொடர்பு
Association of attributes	—	பண்புகளின் உறவு
Asymmetry	—	சமச்சீரின்மை
Attribute	—	பண்பு
Average	—	சராசரி
,, Deviation	—	சராசரி விலக்கம்
Axes of coordinates	—	கிடை; நிலை அச்சுகள்; X, Y-அச்சுகள்
,, reference	—	குறிப்பீட்டச்சுகள்
Axiom	—	வெளிப்படை உண்மை

Axis	—	அச்சு
,, of symmetry	—	சமச்சீரச்சு

B

Base	—	அடிப்படை, அடிப்பக்கம்
Best fit	—	மிகச்சிறந்த பொருத்தம்
Bias	—	பிறழ்ச்சி, ஒரு புறச் சாய்வு
Biased	—	பிறழ்ச்சியான, ஒரு சார்பான
Binary comparison	—	இருபடி ஒப்பிடுதல், ஈரிணை ஒப்பீடு
Binary operation	—	ஈரிணைச் செய்கை
Binomial	—	ஈருறுப்பு
,, Distribution	—	ஈருறுப்புப் பரவல்
,, Theorem	—	ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Birth	—	பிறப்பு, உயிர் தோற்றம்
,, Process	—	பிறப்பு வழிமுறை
,, Rate	—	பிறப்பு வீதம்

C

Census	—	மக்கட்கணிப்பு
Central Limit Theorem	—	மைய எல்லைத் தேற்றம்
Central tendency	—	மையப் போக்கு
Centre	—	மையம்
Chance	—	வாய்ப்பு
,, Variate	—	வாய்ப்பு மாறி
Chart	—	விளக்கப்படம்
Class	—	பிரிவு, வகை
Class frequency	—	பிரிவு அலைவெண், பிரிவு நிகழ்வெண்
Class interval	—	பிரிவு இடைவெளி
Class limit	—	பிரிவு எல்லை
Classification	—	பாகுபாடு, பிரிவினை, வகுப்பாக்கம்
,, one way	—	ஒருவழிப் பாகுபாடு
,, two way	—	இருவழிப் பாகுபாடு
,, three way	—	மூவழிப் பாகுபாடு
Classify		பாகுபடுத்து, பிரிவினைசெய்
Coefficient	—	கெழு, குணகம்
,, of association	—	தொடர்புக் கெழு

Coefficient of dispersion — சிதறல் கெழு
" of skewness — கோட்டக் கெழு
" of variation — மாறுபாட்டுக் கெழு
Column — நிரல், பத்தி
" matrix — நிரல் அணி
" vector — நிரல் வெக்டர்
Compound Events — கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்
Computation — கணிப்பு, கணக்கிடுதல்
Compute — கணி, கணக்கிடு
Computer — கணனி
Concomitant — உடனியங்குகின்ற
Confidence — நம்பிக்கை
" coefficient — நம்பகக் கெழு
" interval — நம்பக இடைவெளி
" limits — நம்பக எல்லைகள்
Conformity — இணக்கம்
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous — தொடர்ச்சியான
" curve — தொடர் வளைவரை
" function — தொடர்ச்சியான சார்பு, தொடர்புடைச் சார்பு
" variable — தொடர்மாறி
Convention — மரபு
Correlation — ஒட்டுறவு, உடன் தொடர்பு
" coefficient — ஒட்டுறவுக் கெழு
Correlation Inverse — எதிரிடை ஒட்டுறவு, நேர்மாறு ஒட்டுறவு
Correlation rank — தர ஒட்டுறவு, மதிப்பிதித் தொடர்பு
" ratio — ஒட்டுறவு விகிதம்
" table — ஒட்டுறவுப் பட்டியல், தொடர்புப் பட்டியல்
Covariance — உடன்மாறுபாடு
Cumulants — குவிவுகள்
Comulative curve — குவிவு வளைவரை
Cumulative Dis ribution — குவிவுப் பரவல்
Cumulative frequency — குவிவு அலைவெண்
Curve — வளைவரை, வளைகோடு
Curve fitting — வளைகோட்டைப் பொருத்துதல்
Cycle — சுழற்சி

Cyclical fluctuation	—	சுழற்சி ஏற்றவிறக்கம்
Cyclical variation	—	சுழற்சி மாறுபாடு

D

Data	—	விவரங்கள்
" Primary	—	முதல்நிலை விவரங்கள்
" Secondary	—	இரண்டாம்நிலை விவரங்கள்
" Statistical	—	புள்ளி விவரங்கள்
Death rate	—	இறப்பு வீதம்
Decile	—	பதின்மானம், பதின்மம்
Define	—	வரையறு
Definite	—	வரையறுத்த, குறிப்பிட்ட
Definition	—	வரையறை, வரைவிலக்கணம்
Degree	—	படி, அடுக்கு
" of freedom	—	கட்டின்மைப்படி, கட்டின்மை எண்ணிக்கை
Density	—	அடர்த்தி
" frequency	—	அலைவு அடர்த்தி, நிகழ்வெண் அடர்த்தி
" probability	—	நிகழ்தகவு அடர்த்தி
Dependent	—	சார்ந்த
" Event	—	சார் நிகழ்ச்சி
" Functionr	—	சார்ந்த சார்புகள்
" Variable	—	சார்புடைமாறி, சார்ந்தமாறி
Derive	—	வருவி, தருவி
Derived	—	வழிவந்த, தருவித்த
" function	—	வழிச்சார்பு
" set	—	வழிக்கணம்
Design	—	உருவமைப்பு, திட்ட அமைப்பு
" randomized	—	சமவாய்ப்பு திட்ட அமைப்பு
Designs of experiments	—	சோதனைத் திட்ட அமைப்புகள்
Deviation	—	விலக்கம்
" Absolute	—	மொத்த விலக்கம்
" Average	—	சராசரி விலக்கம்
" Mean	—	கூட்டுச்சராசரி விலக்கம்
" Quartile	—	கால்மான விலக்கம்
" Standard	—	திட்டவிலக்கம் ; தரவிலக்கம்
Diagram	—	விளக்கப்படம்
" Scatter	—	சிதறல் விளக்கப்படம்
" Statistical	—	புள்ளிவிவர விளக்கப்படம்

Discontinuity — தொடர்ச்சியின்மை
Discontinuous — தொடர்ச்சியற்ற
Discrete — தனித்தனி, தொடர்ச்சியற்ற
Dispersion — சிதறல், பரவுகை
 ,, Measures of — பரவுகை அளவைகள்
Distribution — பரவல்
 ,, Binomial — ஈருறுப்புப் பரவல்
 ,, Bivariate — இருமாறிப் பரவல்
 ,, Chi-square — கை-வர்க்கப் பரவல்
 ,, Continuous — தொடர் பரவல்
 ,, Cumulative — குவிவுப் பரவல்
 ,, Discrete — தொடர்ச்சியற்ற பரவல்
 ,, Exponential — அடுக்குக்குறிப் பரவல்
 ,, Frequency — அலைவுப் பரவல்
 ,, Hyper-Geometric — உயர் பெருக்குப் பரவல்
 ,, Multinomial — பல்லுறுப்புப் பரவல்
 ,, Normal — இயல்நிலைப் பரவல்
 ,, Poisson — பாய்சான் பரவல்
 ,, Sampling — மாதிரிப் பரவல், கூறு பண்புகளின் பரவல்
 ,, Skew — சீரிலாப் பரவல், கோட்டப் பரவல்
Distributive Law — பங்கீட்டு விதி, பரவு விதி,
Divergence — விரிவு, விரிதல்
Divergent series — விரி தொடர்
Divide — வகு, பிரி
Divisor — வகுக்குமெண்
Domain — அரங்கம்
Double Integral — இருமாறித் தொகை
Double Sampling — இருபடி மாதிரி முறை
Dynamics — இயக்கவியல்

E

Earth's axis — புவியச்சு
Efficiency — வினைத்திறன்
Element — மூலகம், உறுப்பு
Elementary — தொடக்கத்துக்குரிய
Eliminant — நீக்கற்பலன்
Eliminate — நீக்கு

Ellipse	—	நீள்வளையம்
Empirical	—	அனுபவ வழி, நடைமுறை, பட்டறி முறை
,, Probability	—	பட்டறி முறை நிகழ்தகவு
Enumeration	—	கணக்கெடுப்பு
Equally likely	—	சரிபாதி வாய்ப்புள்ள, சம வாய்ப்புள்ள
Equation of	—	சமன்பாடு
,, Degree	—	சமன்பாட்டுப்படி
,, Normal	—	மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடு
,, Solution of an	—	ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வு
,, Vectorial	—	திசையிச் சமன்பாடு
Error	—	பிழை
,, Absolute	—	மொத்தப் பிழை, தனிப் பிழை
,, Experimental	—	செய்முறைப் பிழை
,, Normal curve of	—	இயல்நிலைப் பிழை வளைகோடு
,, Percentage of	—	பிழையின் சதவீதம்
,, Probable	—	நிகழத்தக்க வழு (ஒரு பரவலின் நண்பாதி இடைவெளி
,, Relative	—	சார் பிழை
,, Sampling	—	கூறு பண்புகளின் பிழை
,, Standard	—	திட்டப் பிழை (கூறு பண்புகளின் திட்ட விலக்கம்)
,, Function	—	பிழைச் சார்பு
Estimate	—	தோராய மதிப்பு, மதிப்பீடு செய்
,, Consistant	—	உறுதியான மதிப்பீடு
,, Efficient	—	திறமான மதிப்பீடு
,, Sufficient	—	போதுமான மதிப்பீடு
,, unbiassed	—	பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடு
Estimation	—	மதிப்பீடு, மதிப்பியல்
Estimator	—	மதிப்பீட்டுச் சார்பு
Evaluate	—	மதிப்பு காண்
Even chance	—	சரிபாதி வாய்ப்பு
Even function	—	இரட்டைச் சார்பு
Even number	—	இரட்டை எண்
Event	—	நிகழ்ச்சி
,, Compound	—	கூட்டு நிகழ்ச்சி
,, Dependent	—	சார்புடை நிகழ்ச்சி
,, Favourable	—	சாதக நிகழ்ச்சி

Event Independent — சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
Events Mutually Exclusive — ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்
Existence — உளதாயிருத்தல்
Expectation — எதிர்நோக்கல், எதிர்பார்த்தல்
   ,, Conditional — நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர் நோக்கல்
   ,, Expectation of — எதிர்நோக்கலின் எதிர் நோக்கல்
Expectation of Life — எதிர்பார்க்கும் ஆயுள்
Experiment — பரிசோதனை, செய்முறை
Exponent — அடுக்குக் குறி
Exponential cvrue — அடுக்குக்குறி வளைவு
Exponential function — அடுக்குக் குறிச் சார்பு
Exponential distribution — அடுக்குக்குறிப் பரவல்
Expression — கோவை
Extrapolation — புறவைப்பு, புறச்செருகல்

F

Factor — காரணி, பகுப்பு
Factor reversal test — காரணி எதிர்மாற்றுச் சோதனை
Factorial method — பகுப்பாய்வு முறை
Factorial moments — காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
Fiducial limits — நம்பக வரம்புகள்
Finite — முடிவுடைய, முடிவுள்ள
   ,, class — முடிவுள்ள இனம்
   ,, field — முடிவுள்ள களம்
   ,, group — முடிவுள்ள தொகுதி
   ,, number — முடிவுள்ள எண்
Finite population — வரம்புடைய முழுமைத்தொகுதி
   ,, Set — முடிவுள்ள கணம்
Fit — இணைப்பு, சேர்
Flexible — இணக்கமுள்ள
Fluctuation — ஏற்றவிறக்கம்
   ,, random — ஒழுங்கற்ற ஏற்றவிறக்கம்
   ,, seasonal — பருவகால ஏற்றவிறக்கம்
Fore-cast — முன்கணிப்பு
Frame of reference — குறியீட்டச்சு

Freedom — Degrees of — கட்டின்மைக் எண்ணிக்கை, கட்டின்மைக் கூறுகள்
Frequency — அலைவு, அலைவெண், நிகழ்வெண்
,, cumulative — வளர் நிகழ்வெண்
,, curve — நிகழ்வெண் வளைவரை
,, diagram — நிகழ்வெண் விளக்கப் படம்
,, distribution — நிகழ்வெண் பரவல்
,, graph — நிகழ்வெண் வரைபடம்
,, polygon — அலைவுப் பல கோணம
,, ratio — அலைவு வீதம்
,, table — நிகழ்வுப் பட்டியல்
Function — சார்பு
,, Likelihood — நிகழ் பாங்குச் சார்பு
Functional relation — சார்புடைத் தொடர்பு

G

Gamma Function — காமா சார்பு
Generalisation — பொதுவுரை
Generating — உருவாக்கும், பிறப்பிக்கும்
,, curve — பிறப்பிக்கும் வளைகோடு
,, function — பிறப்பிக்கும் சார்பு
Generator — பிறப்பாக்கி
Geometric Mean — பெருக்குச் சராசரி
Geometrical Series — பெருக்குத் தொடர்
Geometrical — வடிவ கணிதத்திற்குரிய
,, interpretation — வடிவ கணித விளக்கம்
Geometry — வடிவ கணிதம்
Goodness of fit — பொருத்தச் செம்மை
Gradation — தரப்படுத்துதல்
Grade — தரம்
Gradient — சாய்வு விகிதம்
Graph — வரைபடம்
Graphical representation — வரைபடக் குறிப்பு

H

Harmonic mean — இசைச் சராசரி
Harmonic motion — இசை இயக்கம்
Homogeneous — ஒரு படித்தான, ஓரின

Hypothesis	—	எடுகோள்
,, Contradictory	—	முரணான எடுகோள்
,, Testing of	—	எடுகோள் சோதனை.

I

Identical	—	சர்வ சம, முழுதும் ஒத்த
Identity	—	சர்வ சமம், முற்றொருமை
Illustration	—	எடுத்துக் காட்டு
Incompatible	—	ஒவ்வாத
Inconsistent	—	பொருந்தாத, முரணான
Increasing function	—	கூடுஞ்சார்பு
Indefinite Integral	—	வரையறுக்கப்படாத தொகை
Independent	—	சார்பற்ற; சார்பிலா
Index	—	குறி, அட்டவணை
,, number	—	குறியீட்டெண்
Inductive method	—	தொகுத்தறி முறை
Induction	—	தொகுப்பு வாதம்
Inference	—	அனுமானம், உய்த்துணர்வு, முடிவு.
Infinite	—	முடிவில்லாத, வரம்பில்லாத
,, Population	—	வரம்பற்ற முழுமைத்தொகுதி
Infinitesimal	—	கழிநுண்
Infinity	—	முடிவிலி கந்தழி
Inflexion	—	வளைவு மாற்றம்
Instant	—	கணப்பொழுது, நொடிநேரம்
Interpolation	—	இடைச்செருகல், உள்வைப்பு
Invariance	—	மாற்றமின்மை
Invariant	—	மாற்றமிலி; மாற்றமிலா
Investigate	—	ஆராய்தல், ஆய்வு செய்தல்
Investigator	—	ஆய்வாளர்
Item	—	உருப்பு, இனம்

K

Kurtosis	—	தட்டை அளவு
,, Lepto Kurtic	—	குறைத்தட்டை
,, Platy Kurtic	—	மிகைத்தட்டை

L

Large samples	—	பெருங் கூறுகள்
Law	—	விதி

Law — Associative — சேர்ப்பு விதி, தொகுப்பு விதி
,, — Commutative — பரிமாற்றுவிதி
,, — Distributive — பங்கீட்டு விதி, பரவுவிதி
Law of errors — பிழைகளின் விதி
,, ,, large numbers — பேரினங்களின் விதி
,, ,, Statistical regularity — புள்ளியியல் ஒழுங்குவிதி
Least Squares — method of — மீச்சிறுபடி முறைகள்
Limit — எல்லை வரம்பு
,, — Confidence — நம்பக வரம்பு
,, — Control — கட்டுப்பாட்டு வரம்பு
Limitng Value — எல்லை மதிப்பு
Linear — நேர்கோட்டுக்குரிய, ஒருபடிக் குரிய
Linear Combination — ஒருபடிச் சேர்க்கை
Linear Correlation — நேர்கோட்டு ஒட்டுறவு
,, function — ஒருபடிச்சார்பு
Logarithm — இலாகிரிதம், மடக்கை
Logarithmic Series — மடக்கைத் தொடர்

M

Mark — குறி, மதிப்பெண்
Marked Price — குறித்த விலை
Markov chain — மார்கோவின் நிகழ்ச்சிக் கோவை, மார்கோவ் சங்கிலி
Mass — திணிவு, பொருண்மை
Matrix — அணி
,, — Adjoint — சேர்ப்பு அணி, துணை அணி
,, — Augmented — விளிம்பு கூட்டிய அணி
,, — Column — நிரல் அணி
,, — Diagonal — மூலைவரை அணி
,, — Inverse — நேரெதிர் அணி
,, — Non-singular — பூஜ்யமில்லா அணி
,, — Grder of — அணியின் தரம்
,, — Regular — ஒழுங்கு அணி
,, — Rank — அணி அளவை
,, — Row — நிரை அணி
,, — Skew-symmetric — எதிர்ச்சீர் அணி
,, — Square — சதுர அணி
,, — Stochastic — ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி

Matrix — Symmetric	— சமச்சீர் அணி
,, — Transpose	— நிரை, நிரல் மாற்று அணி
,, — Unit	— அலகு அணி
Matter	— சடப்பொருள், சடம்
Mean	— சராசரி, இடை
Measure	— அளவு, அளவை
Measures of Central tendency	— மையப்போக்கு அளவைகள்
Median	— மத்திய அளவு, இடைநிலை மதிப்பு
,, Class	— இடைநிலைப் பிரிவு
Minimum	— மீச்சிறு, சிறுமம்
Mode	— முகடு
— Bimodal	— இருமுகட்டு
— Multimodal	— பல்முகட்டு
— Unimodal	— ஒருமுகட்டு
Modulus	— மட்டு, எண்ணளவு
Moment	— விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
,, — n th	— n-படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
Multiple	— மடங்கு
,, Correlation	— பல் ஒட்டுறவு, பல் தரத் தொடர்பு
,, Sampling	— பல்படி மாதிரி முறை
Multivariate	— பல் மாறி
,, distribution	— பல் மாறிப்பரவல்
,, function	— பல் மாறிச் சார்பு

N

Nature	— இயற்கை, இயல்பு
Natural Numbers	— இயற்கை எண்கள்
Necessary and Sufficient Conditions	— தேவையானதும், போதுமான நிபந்தனைகள்
Nonsesse Correlation	— பொருளற்ற ஒட்டுறவு
Normal curve	— இயல்நிலை வளைவரை
;; distribution	— இயல்நிலைப் பரவல்
,, equations	— இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள்
Notation	— குறியீடு
Number	— எண்

Number — Cordinal	— முதலெண், ஆதி எண்
,, — Even	— இரட்டை எண்
,, — Negative	— குறையெண்
,, — Odd	— ஒற்றை எண்
,, — Ordinal	— வரிசை எண்
,, — Positive	— மிகையெண்
,, — Prime	— பகாவெண்
,, — Real	— மெய்யெண்
Numerical	— எண்ணுக்குரிய
,, analysis	— எண் சார் பகுப்பாய்வு
,, Mathematics	— எண் சார் கணிதம்
,, Value	— பெறுமானம், எண் மதிப்பு

O

Object	— பொருள்
Observation	— கண்டறிதல், நேரில் காணல்
Observed data	— கண்டறிந்த விவரங்கள்
Odds against	— பாதக விகிதம்
Odds in favour	— சாதக விகிதம்
Ogive	— வளர் நிகழ்வரை
,, — Less than	— கீழின வளர் நிகழ்வரை
,, — Greater than	— மேலின வளர் நிகழ்வரை
One to one correspondence	— ஒன்றுக்கொன்றுன ஒத்தியைபு
One way classification	— ஒருவழி வகுப்பாக்கம்
Order	— வரிசை, ஒழுங்கு
Origin	— ஆதி
Oscillation	— அலைவு, ஊசல்
Oscillating series	— அலைத்தொடர்
Oscillatory motion	— அலைவியக்கம்

P

Parameter	— புள்ளியியல் பண்பளவை, துணையலகு
Partial association	— ஒருசிறைத் தொடர்பு
Partial correlation	— ஒரு தலையான ஒட்டுறவு, பகுதி ஒட்டுறவு
Particle	— துகள்
Peak	— முனை, உச்சி, சிகரம்
Peakedness	— சிகரத் தன்மை

Perent	—	சதவீதம்
Percentage Error	—	சதவீதப் பிழை
Percentile	—	நூற்றுமானம்
Period	—	காலம், காலவட்டம்
Pilot enquiry	—	முன்னோடி விசாரணை
Pilot survey	—	முன்னோடி அளவெடுப்பு
Point	—	புள்ளி
Point at infinity	—	முடிவிலிப்புள்ளி, கந்தழிப் புள்ளி
Pole	—	துருவம், இசைப்புள்ளி
Population	—	இனம், இனத்தொகுதி, முழுமைத் தொகுதி
,, —finite	—	வரம்புடைய இனத்தொகுதி
,, —infinite	—	வரம்பற்ற இனத்தொகுதி
,, —hypothetical	—	கற்பனை இனத்தொகுதி
,, —real	—	தற்கால இனத்தொகுதி
,, —stationary	-	நிலைமாறு இனத்தொகுதி
Population estimate	—	இனப்பண்பு மதிப்பீடு, மக்கள் மதிப்பீடு
Precise	—	திட்பமான
Precision	—	திட்பம்
Prediction	—	முன் கூற்று
Principal	—	தலையாய, முதல்
Principle	—	தத்துவம், கொள்கை
Probable	—	நிகழக்கூடிய, நிகழத்தக்க
Probability	—	நிகழ்தகவு
,, —Absolute	—	தனி நிகழ்தகவு
,, —Addition Law of	—	நிகழ்தகவு கூட்டல் விதி
,, —Aposteriori	—	பின் நிகழ்தகவு
,, —Apriori	—	முன் நிகழ்தகவு
,, —Compound	—	நிகழ்தகவுச் சேர்க்கை
,, —Conditional	—	நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு
,, —density function	—	நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
,, — Joint	—	கூட்டு நிகழ்தகவு
,, Integral	—	நிகழ்தகவு தொகையீடு
,, —Normal	—	இயல் முறை நிகழ்தகவு
,, —Multiplication Law of	—	நிகழ்தகவு பெருக்கல் விதி
,, —Statistical	—	புள்ளியியல் நிகழ்தகவு

Procedure — செயன் முறை, நடைமுறை
Process — வழி முறை, செய்முறை
Process —Birth — பிறப்பு வழி முறை
,, —Birth and Death — பிறப்பு, இறப்பு வழி முறை
,, —Stochastic — ஸ்டொக்காஸ்டிக் வழி முறை
,, —Yule — யூல் வழிமுறை
Product — பெருக்கம்
Property — தன்மை, பண்பு

Q

Qualitative Data — பண்பின் விவரங்கள்
Quality — பண்பு, தன்மை, தரம்
,, Control — தரக்கட்டுப்பாடு
Quantity — கணியம், எண்ணிக்கை
Quantitative Data — எண் அளவை விவரங்கள்
Quarter — கால் பங்கு
Quartile — கால் மானம், கால்மம்
,, —Lower — முதற்கால்மம்
,, deviation — கால்ம விலக்கம்
,, —upper — மூன்றும் கால்மம்
,, range — கால்ம இடைவெளி

R

Random — சரிசமவாய்ப்புள்ள, இயைபிலா
,, sample — சரிசம வாய்ப்புக் கூறு
,, variate — சரிசம வாய்ப்பு மாறி, புள்ளியியல் மாறி
,, walk — இயைபிலா நடை
Range — வீச்செல்லை, இடைவெளி
Rank — தரம், மதிப்பிடம், வரிசை
,, Correlation — தர ஒட்டுறவு, வரிசைத் தொடர்பு
Rate — வீதம்
Ratio — விகிதம்
Raw Data — சீர்படா விவரங்கள்
Raw Material — மூலப் பொருள்
Reckon — கணக்கிடல், கணித்தல்

Regression	--	மாறிகளின் தொடர்பு, பின்னடைவு
,, Coefficient	—	மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு
,, equations	—	மாறிகளின் தொடர்புச் சமன் பாடுகள்
,, lines	—	மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள்
,, —Partiai	—	ஒரு புற மாறிகளின் தொடர்பு
Regular	—	ஒழுங்கான
,, figure	—	ஒழுங்கான உருவம்
,, matrix	—	ஒழுங்கு அணி
Regular polygon	—	ஒழுங்கு பல் கோணம்
,, sampling method	—	ஒழுங்கான மாதிரி முறை
Relation	—	தொடர்பு
Relative	—	சார்ந்த, சார்
,, density	—	சார் அடர்த்தி
,, error	—	சார் பிழை
Representation	—	குறிப்பு, விளக்கம்
Representative sampling	—	வகைப்படுத்திய கூற்றுமுறை
Residue	—	எச்சம், மீதி
Residual error	—	மீதிப் பிழை
Root	—	மூலம்
Root mean square deviation	—	வர்க்கமூல சராசரி வர்க்க விலக்கம்
Row and Column	—	நிரையும், நிரலும்

S

Sample	—	கூறு, மாதிரி
,, —Large	—	பெருங்கூறு
,, —Optimum	—	உத்தமக் கூறு
,, —Small	—	சிறு கூறு
Sampling average	—	கூறுகளின் சராசரி
,, distribution	—	கூறு பரவல், மாதிரிப் பரவல்
,, error	—	கூறுப் பிழை
,, —Extensive	—	விரிவாக கூறெடுத்தல்
,, fluctuations	—	கூறுதேர்வின் ஏற்ற விறக்கங்கள்
,, methods	—	கூறெடுத்தல் முறைகள்
,, —Purposive	—	நோக்கத்துடன் கூறெடுத்தல்

Sampling —Random	—	சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல்
" —Systamatic	—	முறையாகக் கூறெடுத்தல்
Scalar	—	எண்ணி, திசையிலி
Scalar product	—	எண்ணிப் பெருக்கி, புள்ளிப் பெருக்கி
Scatter	—	சிதறல், பரந்து கிடத்தல்
" diagram	—	சிதறல் விளக்கப் படம்
Semi-inter quartile range	—	அரை இடைக்கால்மம்
Set	—	கணம்
" algebra	—	கண இயற்கணிதம்
" of points	—	புள்ளிக் கணம்
Significance	—	முக்கியத்துவம்
" —Test of	—	முக்கியத்துவ சோதனை
Significant	—	பொருளுடைய
" levels	—	முக்கிய நிலைகள்
" figures	-	பொருளுடைய இலக்கங்கள்
Size	—	பருமன், உருவளவு
Skew	—	சமச்சீரில்லா, சீரற்ற
" Symmetrie matix	—	எதிர்ச்சீர் அணி
Skewness	—	சீரின்மை, கோட்டம்
" Coefficient of	—	கோட்டக் கெழு
" Measures of	—	கோட்ட அளவைகள்
Space	—	வெளி, இடம்
" Two Dimmensional	—	இருபரிமாண வெளி
" Three Dimensional	—	முப்பரிமாண வெளி
" n-Dimensional	—	*n*-பரிமாண வெளி
" Sub	—	உள்வெளி
Spurious correlation	—	போலித் தொடர்பு
Standard	—	தரமான, திட்டமான
" deviation	—	திட்டவிலக்கம்
" error	—	திட்டப்பிழை
" error of estimate	—	மதிப்பீட்டுத் திட்டப்பிழை
Statistic	—	புள்ளியியல் அளவை
Statistical	—	புள்ளியியலுக்குரிய
" Codification	—	புள்ளிவிவரத் தொகுப்பு
" diagram	—	பிள்ளிவிவர விளக்கப்படம்
" graph	—	புள்ளிவிவர வரைபடம்
" inference	—	புள்ளியியல் ஊகம்
" investigator	—	புள்ளியியல் ஆய்வாளர்
" measures	—	புள்ளிவிவர அளவைகள்

Statistical Quality control	— புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு
,, reasoning	— புள்ளியியல் கருத்து முறை
,, regularity	— புள்ளியியல் நிகழ்வொழுங்கு
,, research	— புள்ளிவிவர ஆய்வு
Statistics	— புள்ளிவிவரங்கள், புள்ளியியல்
Step function	— படிச்சார்பு
Stratified sample	— படுகை மாதிரி முறை பகுத்துக் கூறெடுத்தல்
Surface	— மேற்பரப்பு, புறப்பரப்பு
,, curved	— வளைபரப்பு
,, density	— மேற்பரப்பு அடர்த்தி
Symbol	— குறியீடு, அடையாளம்
Symmetrical	— சீரான
Symmetric matrix	— சமச்சீர் அணி
Synthesis	— தொகுப்பு
System	— தொகுதி, முறை, திட்டம்
Systematic	— முறையான, ஒழுங்கான

T

Table	— வாய்பாடு, அட்டவணை
,, Contingency	— நிகழ்வுப்பட்டியல்
,, Life	— உயிர்ப்பட்டியல்
,, Mortality	— ஆயுள்பட்டியல்
Tabulate	— அட்டவணைப்படுத்து, பட்டியல் அமை
Tabulation	— அட்டவணைப்படுத்துதல், பட்டியலமைத்தல்
Telephone	— தொலைபேசி
,, Exchange	— தொலைபேசித் தொடர்பகம்
Test	— சோதனை
,, Theoretical	— அறிமுறை சோதனை
,, Commodity reversal	— பண்டத்திருப்புச் சோதனை
,, Time reversal	— காலத் திருப்புச் சோதனை
Time	— காலம், நேரம்
,, Series	— காலம்சார் தொடர் வரிசை
Total	— மொத்தம்
,, Deviation	— மொத்த விலக்கம்
,, Error	— மொத்தப்பிழை
Transformation	— உருவமாற்றம், நிலைமாற்றம்

Transition — நிலைமாற்றம், நிலைதிரிபு
" matrix — நிலைதிரிபு அணி
" matrix — n Step — n-படி நிலைதிரிபு அணி
" probability — நிலைதிரிபு நிகழ்தகவு
Translation — இடப்பெயர்ச்சி
Transposition — இடமாற்றம்
Trend — போக்கு
" Seasonal — காலப்போக்கு
True class interval — உண்மையான பிரிவு இடைவெளி

U

unbiassed — பிறழ்ச்சியற்ற
uniform — ஒரேசீரான, மாருத
" distribution — சீரான பரவல்
unimodal — ஒரு முகட்டு
unique — மாற்றற்ற தனித்தன்மை யுடைய
uniqueness theorem — தனித்தன்மைத் தேற்றம்
unit — அலகு
" Absolute தனி அலகு
" Derived — வழியலகு
" Standard — திட்ட அலகு, நியம அலகு
" matrix — அலகு அணி
" vector — அலகு வெக்டர்
unsymmetric — சமச்சீரில்லா
" distribution — சமச்சீரில்லாப் பரவல்

V

Value — மதிப்பு, பெறுமானம்
" Approximate — தோராய மதிப்பு
" Limiting Value — எல்லை மதிப்பு
" Maximum — மீப்பெரு மதிப்பு
" Minimum — மீச்சிறு மதிப்பு
" Turning — திரும்பு மதிப்பு
Variable — மாறி
" motion — மாறும் இயக்கம்
" parameter — மாறும் சாராமாறி
" point — மாறும் புள்ளி

Variance	—	மாறுபாடு, பரவற்படி, விலக்கவர்க்கச் சராசரி
Variate	—	புள்ளியியல் மாறி
,, Bi	—	இரு மாறி
,, Continuous	—	தொடர் மாறி
,, Dependent	—	சார்புடை மாறி
,, Discrete	—	தனித்தனி மாறி
,, Independent	—	சார்பில் மாறி, சாரா மாறி
Variation	—	மாறல், மாறுபடுதல்
,, Bounded	—	எல்லையோடு மாறல்
,, Coefficient of	—	மாறுவிகிதக் கெழு
,, Joint	—	இணைந்த மாறல்
Vector	—	வெக்டர், திசையி
Vector product	—	வெக்டர் பெருக்கல்

W

Walk	—	நடை
,, Randan	—	இயைபிலா நடை
Weight	—	எடை, நிறை
Weighted average	—	நிறையிட்ட சராசரி
,, Index nember	—	நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
Work	—	வேலை